MATEMATICA DISCRETA
CdL in Informatica — a.a. 2017/2018
prof. Fabio GAVARINI

Test scritto del 20 Dicembre 2017

....

N.B.: presentare lo svolgimento del test in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quel che si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.... ⊛ ....

[1] Calcolare tutte le soluzioni in $\mathbb{Z}$ del sistema di equazioni congruenziali

$$\circledast \, : \begin{cases} 17\,x \;\equiv\; -105 \quad \big(\bmod 5\big) \\ -55\,x \;\equiv\; 11 \quad \big(\bmod 3\big) \\ 23\,x \;\equiv\; 36 \quad \big(\bmod 7\big) \end{cases}$$

[2] Dato l'insieme $\mathbb{E} := \big\{0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,9\,,\heartsuit,\spadesuit\,,\clubsuit\,,\diamondsuit\big\}$, determinare:

(a) una partizione π' di $\mathbb{E}$ in cinque blocchi che abbiano cardinalità 5, 3, 3, 2, 1;

(b) una partizione π'' di $\mathbb{E}$ in quattro blocchi che abbiano cardinalità 7, 5, 1, 1.

[3] Si consideri l'insieme delle parti $\mathcal{P}\big(\{C,O,R,N,A\}\big)$ e in esso il sottoinsieme
$\mathcal{E} := \big\{\{O\},\{C\},\{O,R\},\{O,N\},\{C,O,R\},\{O,R,N\},\{C,O,N\},\{C,N,A\},\{C,O,N,A\}\big\}$
Nel suddetto insieme $\mathcal{E}$ consideriamo la relazione di inclusione $\subseteq$, rispetto alla quale abbiamo che $\big(\,\mathcal{E}\,;\subseteq\,\big)$ è un insieme ordinato.

(a) Disegnare il *diagramma di Hasse* dell'insieme ordinato $\big(\,\mathcal{E}\,;\subseteq\,\big)$.

(b) Esiste $\max(\mathcal{E})$? Se sì, precisare quale sia tale massimo; se no, spiegare il perché.

(c) Esistono elementi *minimali* in $\big(\,\mathcal{E}\,;\subseteq\,\big)$? Se sì, precisare quali siano; se no, spiegare perché non esistano.

(d) Esiste $\inf\big(\{C,O,N\},\{C,N,A\}\big)$? Se sì, precisare quale sia tale estremo inferiore; se no, spiegare perché non esista.

(e) Esiste $\inf\big(\{C,N,A\},\{O,R,N\}\big)$? Se sì, precisare quale sia tale estremo inferiore; se no, spiegare perché non esista.

(f) Esiste $\sup\big(\{C\},\{O\}\big)$? Se sì, precisare quale sia tale estremo inferiore; se no, spiegare perché non esista.

[4] Dimostrare per induzione debole su $n \in \mathbb{N}$ che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero naturale $A(n) := 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ è un multiplo di 7 (in $\mathbb{N}$).

(continua $\Longrightarrow$)

[5] *(a)* Determinare se esistano le classi inverse $\overline{9}^{\,-1}$, $\overline{5}^{\,-1}$, $\overline{7}^{\,-1}$, $\big(\overline{9}\cdot\overline{7}\big)^{-1}$ e $\big(\overline{5}\cdot\overline{7}\big)^{-1}$ nell'anello $\mathbb{Z}_{20}$ degli interi modulo 20. In caso negativo, si spieghi perché tale classe inversa non esista; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente la suddetta classe inversa.

(b) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione modulare $\overline{647}\,\overline{x} = \overline{-516}$ in $\mathbb{Z}_{20}$.

(c) Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione congruenziale $436\,x \equiv 92 \pmod{20}$ in $\mathbb{Z}$.

[6] Sia dato un insieme A e due suoi sottoinsiemi $B, C\,\big(\subseteq A\big)$. Si consideri la funzione

$$f : \mathcal{P}(B) \longrightarrow \mathcal{P}\big(B \setminus C\big)\ ,\quad D \mapsto f(D) := D \setminus C \qquad\qquad \forall\ D \in \mathcal{P}(B)$$

Dimostrare che:

(a) la funzione f è suriettiva;

(b) la funzione f è iniettiva $\iff$ $B \cap C = \emptyset$.

[7] *(a)* Sia n il numero naturale che in base dieci è espresso dalla notazione posizionale $n := (9873)_{\text{DIECI}}$. Scrivere n in base $b' :=$ OTTO e in base $b'' :=$ SETTE.

(b) Scrivere in base $b' :=$ DIECI il numero S che in base $b :=$ CINQUE è espresso dalla scrittura posizionale $S := \big(41032\big)_b$.

(c) Scrivere in base $b' :=$ QUATTRO e in base $b'' :=$ DUE il numero L che in base $b :=$ OTTO è espresso dalla scrittura posizionale $L := \big(3471\big)_b$.

(d) Utilizzando la notazione posizionale in base $\beta :=$ TRE, calcolare la somma $N + M$ dove N ed M sono i due numeri naturali espressi in base β da

$$N := \big(12021\big)_\beta \qquad \text{e} \qquad M := \big(20102\big)_\beta$$

esprimendo a sua volta la suddetta somma con la scrittura posizionale in base $\beta :=$ TRE e con la scrittura posizionale in base $\beta' :=$ DIECI.

[8] Per ogni $\ell \in \mathbb{N}_+$, sia $\psi(\ell) := \big\{\, p \in \mathbb{N}_+ \,\big|\, p \text{ è primo}, p \text{ divide } \ell \,\big\}$. Sia $\lhd$ la relazione in $\mathbb{N}_+$ definita così: $\ell_1 \lhd \ell_2 \iff \psi\big(\ell_1\big) \subseteq \psi\big(\ell_2\big)$, per ogni $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}_+$. Dimostrare che:

(a) la relazione $\lhd$ è riflessiva e transitiva;

(b) la relazione $\lhd$ non è antisimmetrica;

(c) esiste un $\ell_\downarrow \in \mathbb{N}_+$ tale che $\ell_\downarrow \lhd \ell$ per ogni $\ell \in \mathbb{N}_+$;

(d) non esiste un $\ell^\uparrow \in \mathbb{N}_+$ tale che $\ell \lhd \ell^\uparrow$ per ogni $\ell \in \mathbb{N}_+$;

(e) la relazione $\asymp$ in $\mathbb{N}_+$ definita da $\ell_1 \asymp \ell_2 \iff \big(\ell_1 \lhd \ell_2\big) \wedge \big(\ell_2 \lhd \ell_1\big)$ è un'equivalenza.

[9] Calcolare il resto nella divisione per 20 dei tre numeri

$$a := 457^{35062867} \quad , \qquad b := 2384^{16} \quad , \qquad c := 645^{5607290843}$$

[10] Siano $\big\{E'_i\big\}_{i \in I}$ e $\big\{E''_j\big\}_{j \in J}$ due partizioni dell'insieme non vuoto E. Posto $K := \big\{(i,j) \in I \times J \,\big|\, E'_i \cap E''_j \neq \emptyset\big\}$, si dimostri che anche $\big\{E'_i \cap E''_j\big\}_{(i,j) \in K}$ è partizione di E.