GEOMETRIA I modulo

CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2010/2011

prof. Fabio GAVARINI

Esonero del 21 Dicembre 2010

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, si considerino i cinque vettori

$$w_1 := \big(3\,,\,-1\,,\,1\,,\,2\big)\ ,\quad w_2 := \big(2\,,-3\,,\,2\,,\,2\big)\ ,\quad w_3 := \big(1\,,\,2\,,\,-1\,,\,0\big)$$
$$w_4 := \big(0\,,7\,,\,-4\,,\,2\big)\ ,\qquad w_5 := \big(7\,,-1\,,\,3\,,\,0\big)$$

il sottospazio vettoriale $W := \mathit{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ generato da tali vettori, e il vettore $v := \big(7\,,\,4\,,\,0\,,\,-2\big)$.

(a) Determinare la dimensione di W.

(b) Determinare una base B_W di W contenuta nell'insieme $\big\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\big\}$ dei generatori di W stesso.

(c) Determinare una base B di $V := \mathbb{R}^4$ che contenga la base B_W di W trovata al punto *(b)*.

(d) Determinare se il vettore v appartenga al sottospazio W.

(e) Calcolare le coordinate del vettore v rispetto alla base B di $V := \mathbb{R}^4$ ottenuta al punto *(c)*.

[2] Si risolvano i due sistemi lineari

$$\circledast_1 : \begin{cases} -x_1 + 3\,x_3 + x_4 = -2 \\ x_2 + 2\,x_3 - x_4 = -4 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3\,x_3 + 2\,x_4 = 11 \end{cases} \qquad\qquad \circledast_2 : \begin{cases} -x_1 + 3\,x_3 + x_4 = -6 \\ x_2 + 2\,x_3 - x_4 = -5 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 - 3\,x_3 + 2\,x_4 = 9 \end{cases}$$

nelle indeterminate $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

[3] Per ogni $\ell \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$M_\ell \;:=\; \begin{pmatrix} \ell - 2 & 1 & \ell + 3 \\ \ell^2 - 3\,\ell + 2 & 2\,\ell & \ell^2 + 2\,\ell - 3 \\ 6 - 3\,\ell & \ell - 2 & \ell^2 + 4\,\ell - 11 \end{pmatrix} \;\in\; Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) \;.$$

(a) Calcolare il rango di M_ℓ (per ogni valore di $\ell \in \mathbb{R}$).

(b) Determinare tutti i valori di $\ell \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice M_ℓ sia invertibile.

(c) Si consideri il caso $\ell = 0$. Se la matrice M_0 risulta invertibile, calcolarne l'inversa M_0^{-1}, *verificando esplicitamente* che la matrice trovata sia effettivamente l'inversa di M_0. Se invece la matrice M_0 risulta non invertibile, si determini un vettore $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^3$ tale che $\underline{\alpha} \neq \underline{0} := (0,0,0)$ e inoltre $M_0 \cdot \underline{\alpha} = \underline{0}$.