GEOMETRIA I modulo

CdL in Scienze e Tecnologie per i Media — a.a. 2010/2011

prof. Fabio GAVARINI

Esame scritto del 20 Febbraio 2012

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . * . . . .

[1] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, si considerino i tre vettori

$$u_1(h) := \big(0\,,\,1\,,\,0\,,\,2h{-}2\big)\ , \qquad u_2(h) := \big(1\,,\,0\,,\,0\,,\,h{-}1\big)$$
$$u_3(h) := \big(h{-}1\,,\,2h{+}1\,,\,-3h\,,\,-1\big)$$

dipendenti dal parametro $h \in \mathbb{R}$, e si indichi con $U_h := \mathit{Span}\big(u_1(h), u_2(h), u_3(h)\big)$ il sottospazio vettoriale (anch'esso dipendente dal parametro h) generato in V da tali vettori. Al variare di $h \in \mathbb{R}$, risolvere i seguenti problemi.

(a) Determinare la dimensione del sottospazio $U(h)$.

(b) Estrarre dall'insieme $\big\{u_1(h), u_2(h), u_3(h)\big\}$ un suo sottoinsieme B_{U_h} che sia una base del sottospazio U_h.

(c) Estendere la base B_{U_h} di U_h trovata al punto *(b)* ad una base B_h di tutto lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$.

— * * * —

[2] Si considerino la matrice $A \in Mat_{5\times 4}(\mathbb{R})$ e i vettori $\underline{b}', \underline{b}'' \in \mathbb{R}^5$ dati da

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{b}' := \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{b}'' := \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Calcolare il nucleo $Ker(A)$ della matrice A, precisandone la dimensione.

(b) Calcolare la dimensione dell'immagine $Im(A)$ della matrice A, e calcolarne esplicitamente una base.

(c) Risolvere i due sistemi lineari $\circledast' : A \cdot \underline{x} = \underline{b}'$ e $\circledast'' : A \cdot \underline{x} = \underline{b}''$.

(continua...)

[3] Si considerino lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^3$ e in esso gli insiemi

$$B_v := \{ v_1 := (1,1,0), v_2 := (3,1,0), v_3 := (0,1,3) \}$$
$$B_w := \{ w_1 := (3,3,-6), w_2 := (9,3,-6), w_3 := (-15,3,-12) \}$$

(a) Dimostrare che B_v e B_w sono basi di V.

(b) Poiché B_v è base di V, esiste una e una sola funzione lineare $F : V \longrightarrow V$ (cioè un endomorfismo di V) tale che $F(v_i) = w_i$ per $i = 1,2,3$. Determinare l'unica matrice $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $F = L_A$, cioè $F(\underline{x}) = L_A(\underline{x}) := A \cdot \underline{x}$ (prodotto righe per colonne tra matrici) per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}$ (scritto come matrice colonna).

(c) Determinare se l'endomorfismo $F \in End(V)$ di cui al punto *(b)* sia diagonalizzabile oppure no.

— ∗ ∗ ∗ —

[4] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare canonico, si consideri il sottospazio $W := Span(w_1, w_2, w_3)$ generato dai tre vettori

$$w_1 := (1,0,3,0), \qquad w_2 := (1,0,0,1), \qquad w_3 := (0,0,-1,1).$$

(a) Determinare una base ortogonale B_W di W.

(b) Completare la base (ortogonale) B_W del sottospazio W determinata al punto *(a)* ad una base ortogonale B_V dell'intero spazio $V := \mathbb{R}^4$.

(c) Detto $U := Span(u_1, u_2)$ il sottospazio generato dai due vettori $u_1 := (2,0,-1,3)$ e $u_2 := (-1,-3,0,2)$, calcolare esplicitamente il sottospazio $U^\perp$ ortogonale a U, e determinarne una base esplicita.