III appello di Geometria II - 15 Giugno 2004

Risolvere i seguenti esercizi dando brevi spiegazioni dei procedimenti e teoremi utilizzati.

Esercizio 1) Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione 5.
Determinare a meno di coniugio tutti gli endomorfismi ciclici di V con due autovalori distinti fissati.
La risposta cambia se V è uno spazio vettoriale reale?

Esercizio 2) Sia C una conica non degenere nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2$. Sia r una retta in $\mathbb{P}^2$ e $P \in C$ un punto tale che $P \notin r$. Per $Q \in C$, sia s_Q la retta che passa per P e Q (nel caso $Q = P$ si prenda la tangente a C in P). Sia $\pi : C \to r$ l'applicazione definita da $\pi(Q) = s_Q \cap r$.
a) Provare che $\pi : C \to r$ è biettiva.
b) Se $\alpha : r \to r$ è una proiettività, si definisce una *proiettività* di C tramite $\beta := \pi^{-1} \circ \alpha \circ \pi : C \to C$. Trovare i punti fissi di β.

Esercizio 3) Sia $Z \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ una matrice diagonale invertibile. Siano $X_Z := \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) : A^t = -ZA\}$ e $Y_Z := \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) : A^t = ZA\}$.
1) Provare che X, Y sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$.
2) In funzione degli autovalori di Z, determinare la dimensione di X_Z, trovare una sua base e una sua rappresentazione implicita.
3) Trovare $X_Z \cap Y_Z$.
4) Determinare per quali Z accade che $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) = X_Z \oplus Y_Z$.