GEOMETRIA 2 — 2004/2005

Prof. Mauro Nacinovich

Appello del 14-06-2005

. . . .

1) Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^3$, si consideri la forma bilineare $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_M$ associata alla matrice

$$M := \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

(a) Si dimostri che la forma $\mathfrak{b}$ è non degenere.

(b) Si calcoli l'indice di Witt $\nu(V)$ di $\big(V, \mathfrak{b}\big)$.

(c) Si determini una base ortogonale di $\big(V, \mathfrak{b}\big)$.

(d) Si determini una decomposizione di Witt di $\big(V, \mathfrak{b}\big)$, precisando una scelta opportuna del nucleo anisotropo e degli eventuali piani iperbolici.

(e) Si determini una base isotropa canonica per ciascuno dei piani iperbolici che eventualmente compaiano nella decomposizione in *(d)*.

2) Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, e in esso i sottospazi affini S_1 ed S_2 di equazioni cartesiane rispettivamente

$$S_1 \,:\, \begin{cases} x + y - w + 3 = 0 \\ y + z - 7 = 0 \\ x + 2y + w - 5 = 0 \end{cases} \qquad S_2 \,:\, \begin{cases} 2x - z - w + 7 = 0 \\ 3y + 2z + 2w - 5 = 0 \end{cases} .$$

(a) Determinare se esista un iperpiano π in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ che contenga S_2 e sia parallelo ad S_1 . In caso affermativo, precisare quanti di tali iperpiani esistano, e determinare equazioni cartesiane e parametriche di uno di essi. In caso negativo, spiegare perché un tale iperpiano non esista.

(b) Determinare equazioni parametriche di S_1 , di S_2 e di $S_1 \bigcap S_2$.

3) Si consideri in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ la quadrica Q di equazione cartesiana

$$Q \,:\, x^2 + 2y^2 + 4xy - 4yz - 4x - 6y + 6z + 7 = 0 \quad .$$

(a) Determinare il tipo affine di Q .

(b) Detto $\pi(k)$ il piano di equazione cartesiana $\pi(k) : z - k = 0$, determinare il tipo affine della conica $\mathcal{C}(k) := Q \bigcap \mathcal{C}(k)$ (anche negli eventuali casi degeneri) al variare di $k \in \mathbb{R}$.