III appello di Geometria II N.O - 8 Luglio 2002

Risolvere i seguenti esercizi dando brevi spiegazioni dei procedimenti e teoremi utilizzati.

Esercizio 1) Trovare polinomio caratteristico, polinomio minimo, autospazi, autospazi generalizzati e forma di Jordan (se possibile senza trovare esplicitamente una base di Jordan) della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & -7 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2) Trovare l'enunciato duale del seguente problema e risolverlo: "In $\mathbb{P}^3$ con coordinate omogenee $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$ sia L la retta di equazioni $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 = x_2$. Sia P il punto di coordinate $[1 : 0 : 0 : 0]$. Determinare il piano π che contiene L e P."

Esercizio 3) Siano $X := \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : A^t = -A\}$ e $Y := \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : A^t = A\}$.

1) Provare che X, Y sono sottospazi vettoriali di $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.

2) Determinare la dimensione di X, trovare una sua base e una sua rappresentazione implicita.

3) Determinare la dimensione di Y, trovare una sua base e una sua rappresentazione implicita.

4) Provare che $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) = X \oplus Y$.