GEOMETRIA 2 — 2004/2005

Prof. Mauro Nacinovich

Appello del 02-02-2005

. . . .

1) Nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, siano r ed S i sottospazi affini di equazioni cartesiana rispettivamente

$$r\,:\,\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ 2x+z-4=0 \\ z+w-11=0 \end{cases} \qquad\qquad S\,:\,\begin{cases} 4x+3y-2w+3=0 \\ 3y+2z+2w-11=0 \end{cases} .$$

Determinare se esista un iperpiano π in $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ che contenga S e sia parallelo ad r. In caso negativo, spiegare perché tale un tale iperpiano non esista. In caso affermativo, precisare quanti di tali iperpiani esistano, e determinare equazioni cartesiane e parametriche di uno di essi.

2) Determinare l'unica proiettività di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ che mandi i punti $(4:-4)$, $(-1:-3)$ e $(2:4)$ rispettivamente nei punti $(-7:4)$, $(1:8)$ e $(3:15)$.

3) Si consideri in $V:=\mathbb{R}^3$ la forma bilineare $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_A$ associata alla matrice

$$A:=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

(a) Dimostrare che la forma $\mathfrak{b}$ è non degenere.

(b) Determinare l'indice di Witt $\nu(V)$ di $(V,\mathfrak{b})$.

(c) Calcolare una base ortogonale di $(V,\mathfrak{b})$.

(d) Determinare una decomposizione di Witt di $(V,\mathfrak{b})$, precisando una scelta opportuna del nucleo anisotropo e degli eventuali piani iperbolici.

(e) Determinare una base isotropa canonica per ciascuno dei piani iperbolici che eventualmente compaiano nella decomposizione in *(d)*.

4) Sia Q la quadrica in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana

$$Q\,:\,4x^2-3y^2+z^2-8xy-4xz+2yz+18x-6y-10z+27=0 .$$

(a) Determinare il tipo affine di Q.

(b) Calcolare un'equazione cartesiana del piano τ tangente a Q in $T:=\big(2,-1/2,17/2\big)$.