

GEOMETRIA E ALGEBRA

C.d.L.T. in "Informatica" - a.a. 2023-2024 --- prof. Fabio GAVARINI

Testo consigliato: Marco Abate, "Algebra lineare", McGraw-Hill Libri Italia, Milano, 2000

Programma del corso

Richiami di algebra: gruppi, anelli, campi.

Richiami di geometria euclidea: punti, rette e piani nello spazio euclideo; appartenenza, inclusione, incidenza, parallelismo, complanarità, rette sghembe.

Vettori orientati (applicati in un punto) nello spazio euclideo, nel piano, nella retta. Operazioni sui vettori applicati (in uno stesso punto); basi e coordinate per vettori applicati. Riferimenti affini nello spazio euclideo; coordinate.

Equazioni vettoriali di rette e di piani. Vettore direttore di una retta, vettori di giacitura di un piano. Equazioni parametriche di rette e di piani.

Spazi vettoriali su un campo; sottospazi vettoriali. Combinazioni lineari; sottospazio generato da un insieme di vettori in uno spazio vettoriale; sistemi di generatori.

Dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Base di uno spazio vettoriale. Coordinate di un vettore rispetto ad una base. Base canonica in K^n . Estrazione di una base da un sistema di generatori. *Teorema di esistenza (delle basi)*. *Teorema del completamento*. *Teorema di equicardinalità delle basi - dimensione* di uno spazio vettoriale.

Matrici a coefficienti in un campo; operazioni vettoriali tra matrici, trasposizione.

Applicazioni lineari (= "omomorfismi") tra spazi vettoriali. Immagine $Im(f)$ e nucleo $Ker(f)$ di una trasformazione lineare f . Iniettività e suriettività in termini del nucleo e dell'immagine. Rango di una trasformazione lineare.

Teorema del rango (o "della dimensione") per una trasformazione lineare.

La composizione di applicazioni lineari; invertibilità di trasformazioni lineari. Isomorfismo (vettoriale) tra applicazioni lineari e matrici, rispetto a basi fissate.

Teorema di Struttura per una trasformazione lineare.

Sistemi di equazioni lineari. Formulazione matriciale. Sistemi simultanei, equivalenti. omogenei, compatibili. Sistemi e matrici speciali: diagonali, triangolari, quadrati/e.

Teorema di Struttura per l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

Criterio di risolubilità: un sistema ammette soluzioni se e soltanto se la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.

Criterio di unicità: un sistema compatibile ha una sola soluzione se e soltanto se le colonne della matrice dei coefficienti sono linearmente indipendenti.

Operazioni elementari su (le equazioni di) un sistema e sulle matrici. L'algoritmo di eliminazione di Gauss per sistemi lineari quadrati, o per matrici quadrate: i *pivot*.

Risoluzione di un sistema lineare quadrato nel caso triangolare.

Matrici singolari e matrici non-singolari (definizione tramite i *pivot*).

Criterio di risolubilità di un sistema quadrato in termini dei *pivot*.

Prodotto righe per colonne tra matrici, come operazione corrispondente alla composizione di applicazioni lineari: proprietà. Matrici quadrate invertibili; criteri per l'invertibilità di una matrice quadrata. Risoluzione di un sistema lineare quadrato non-singolare tramite l'uso della matrice inversa.

Risoluzione di un sistema lineare quadrato non-singolare tramite E.G. nei due sensi.

Condizioni equivalenti per l'invertibilità di una matrice quadrata. Calcolo dell'inversa di una matrice non-singolare $n \times n$, tramite soluzione di n sistemi con E.G.

Rango-colonne e rango-righe di una matrice. *Teorema di Rouché-Capelli*.

Matrici a scala e loro pivot; sistemi lineari a scala, criterio di compatibilità, dimensione dello spazio delle soluzioni (nel caso omogeneo). Riduzione a scala di un sistema o di una matrice. Risoluzione dei sistemi a scala.

Sottospazi affini di K^n . Equazioni parametriche (=parametrizzazioni) ed equazioni cartesiane di sottoinsiemi di K^n : il caso dei sottospazi vettoriali e dei sottospazi affini.

La funzione determinante: proprietà fondamentali, esistenza, unicità, calcolo tramite riduzione a forma triangolare. Sviluppi di Laplace (*senza dimostrazione*).

Teorema di Binet. Corollario: una matrice quadrata è invertibile se e soltanto se ha determinante diverso da zero. *Teorema di Cramer*: formula esplicita della soluzione di un sistema quadrato con matrice invertibile. Formula esplicita per l'inversa di una matrice invertibile.

Sottomatrici/minori: il *Teorema degli Orlati* per il calcolo del rango di una matrice.

Autovettori, autovalori, autospazi e spettro di un endomorfismo. Molteplicità geometrica di un autovalore. Endomorfismi diagonalizzabili; criterio di diagonalizzabilità in termini di autospazi e di molteplicità geometriche.

Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata; il polinomio caratteristico di un endomorfismo. Calcolo dello spettro e degli autospazi di un endomorfismo T .

=====