CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018–2019

Esame scritto del 21 Giugno 2019 — Sessione Estiva, I appello

Testo & Svolgimento

········· $*$ ·········

[1] — Si considerino le due matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 2}(\mathbb{Q}) \quad , \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{Q})$$

e siano $L_A : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ e $L_B : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$ le due funzioni lineari ad esse associate nel modo canonico.

(a) Calcolare $dim\big(Im(L_A \circ L_B)\big)$.

(b) Determinare se la matrice $A\,B$ (prodotto righe per colonne) sia invertibile; in caso positivo se ne calcoli esplicitamente la matrice inversa, in caso negativo se ne calcoli esplicitamente il nucleo.

(c) Determinare se la matrice $B\,A$ (prodotto righe per colonne) sia invertibile; in caso positivo se ne calcoli esplicitamente la matrice inversa, in caso negativo se ne calcoli esplicitamente il nucleo.

[2] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{C}^3$ si considerino i tre vettori

$$u(t) := \big(-1\,, t+4\,, t-6\big)\ ,\ \ v(t) := \big(2\,, -2\,t-4\,, 6\big)\ ,\ \ w(t) := \big(3-t\,, t^2-8\,, 15-6\,t\big)$$

dipendenti dal parametro $t \in \mathbb{C}$, sia $V_t' := Span\big(u(t), v(t), w(t)\big)$ — per ogni $t \in \mathbb{C}$ — il sottospazio di V generato dai tre vettori $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$, e sia $f_t : V \longrightarrow V$ l'unica funzione lineare da V a V tale che

$$f_t(1\,,0\,,0) := u(t) \quad , \qquad f_t(0\,,1\,,0) := v(t) \quad , \qquad f_t(0\,,0\,,1) := w(t)$$

(a) Per ogni $t \in \mathbb{C}$, calcolare la dimensione del sottospazio V_t' .

(b) Per ogni $t \in \mathbb{C}$, determinare una base del sottospazio V_t' .

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ la funzione f_t sia invertibile.

[3] — Nello spazio affine $\mathcal{A}^4_{\mathbb{R}}$ di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, si consideri il sottospazio affine $\mathcal{S}$ con equazioni cartesiane

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_3 + 2\,x_4 \ = \ 3 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 - 2\,x_3 \ = \ 4 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 \ = \ 7 \end{cases}$$

(a) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$.

(b) Determinare equazioni parametriche per $\mathcal{S}$.

(c) Determinare equazioni parametriche per l'unico sottospazio affine $\mathcal{S}'$ di $\mathcal{A}^4_{\mathbb{R}}$ che sia parallelo a $\mathcal{S}$, abbia la stessa dimensione e passi per il punto $P_0' := (3, -1, 2, 1)$.

[4] — Sia data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{K})$$

dove $\mathbb{K}$ è un campo.

(a) Calcolare lo spettro di A quando $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$.

(b) Calcolare lo spettro di A quando $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_5$.

(c) Per $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$, determinare se la matrice A sia diagonalizzabile; in caso negativo si spieghi il perché, in caso positivo si calcoli esplicitamente una base di autovettori.

(d) Per $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_5$, determinare se la matrice A sia diagonalizzabile; in caso negativo si spieghi il perché, in caso positivo si calcoli esplicitamente una base di autovettori.

— ⋆ —

SVOLGIMENTO

N.B.: lo svolgimento qui presentato è molto lungo... Questo non significa *che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si approfitta per spiegare — in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con molti particolari tutti gli aspetti della teoria toccati più o meno a fondo dal testo in questione.*

[1] — Rispondiamo ai diversi quesiti uno a uno.

(a) Calcoliamo $dim\big(Im(L_A \circ L_B)\big)$ seguendo due procedimenti diversi.

Primo Metodo: Osserviamo che, per costruzione, si ha $dim\big(Im(L_A \circ L_B)\big) \leq 2$. Infatti, da una parte abbiamo, per definizione, $Im(L_A \circ L_B) \leq Im(L_A)$, cioè lo spazio $Im(L_A \circ L_B)$ è sottospazio (vettoriale) di $Im(L_A)$; da questa inclusione tra sottospazi segue allora la disuguaglianza per le loro dimensioni $dim\big(Im(L_A \circ L_B)\big) \leq dim\big(Im(L_A)\big)$; inoltre ricordiamo che per ogni funzione lineare la dimensione dell'immagine è minore o uguale della dimensione dello spazio di partenza, e applicando tale fatto alla funzione L_A — che parte dallo spazio $\mathbb{Q}^2$, di dimensione 2 — otteniamo $dim\big(Im(L_A)\big) \leq 2$, da cui segue che $dim\big(Im(L_A \circ L_B)\big) \leq dim\big(Im(L_A)\big) \leq 2$ e quindi $dim\big(Im(L_A \circ L_B)\big) \leq 2$.

Per migliorare il risultato $dim\big(Im(L_A \circ L_B)\big) \leq 2$ ottenendo invece una uguaglianza, osserviamo prima che $Im(L_B) = \mathbb{Q}^2$. Infatti certamente $Im(L_B)$ è sottospazio di $\mathbb{Q}^2$ (lo spazio di arrivo della funzione lineare L_B); inoltre abbiamo $dim\big(Im(L_B)\big) =: rg\,(B) = 2$, dove la seconda identità segue dall'osservare che B è matrice a scala con esattamente *due* pivot, quindi ha rango 2 . Allora $dim\big(Im(L_B)\big) = 2 = dim\big(\mathbb{Q}^2\big)$ e questo, insieme al fatto che $dim\big(Im(L_B)\big)$ è sottospazio di $\mathbb{Q}^2$, implica che $Im(L_B) = \mathbb{Q}^2$, come affermato. Da questo fatto otteniamo

$$Im(L_A \circ L_B) \;=\; (L_A \circ L_B)\big(\mathbb{Q}^3\big) \;=\; L_A\big(L_B\big(\mathbb{Q}^3\big)\big) \;=\; L_A\big(Im(L_B)\big) \;=\; L_A\big(\mathbb{Q}^2\big) \;=\; Im(L_A)$$

cioè $Im(L_A \circ L_B) \;=\; Im(L_A)$; allora

$$dim\big(Im(L_A \circ L_B)\big) \;=\; dim\big(Im(L_A)\big) \;=:\; rg\,(A) \tag{1}$$

perciò ci basta calcolare $rg\,(A)$. Concludiamo osservando che $rg\,(A) \;=\; 2$, cosa che possiamo appurare in due modi: il primo è osservando che A contiene la sottomatrice quadrata 2×2 $A^{1,2}_{1,2} := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ la quale ha determinante $det\big(A^{1,2}_{1,2}\big) \;=\; 1 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 \;=\; 4 \neq 0$, per cui — grazie al *Teorema degli Orlati* — possiamo concludere che $rg\,(A) = 2$; il secondo è osservando che A può essere ridotta a scala così

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;=:\; S$$

con l'ultima matrice S che è a scala ed ha esattamente 2 pivot, per cui otteniamo che $rg\,(A) = 2$. Questo insieme alla (1) ci permette di concludere che $dim\big(Im(L_A \circ L_B)\big) \;=\; 2$.

Secondo Metodo: Osserviamo che la funzione lineare $L_A \circ L_B$ è descritta — rispetto alle basi canoniche negli spazi vettoriali di partenza e di arrivo $\mathbb{Q}^3$ e $\mathbb{Q}^3$ (due volte!) — dalla matrice $A\,B$ — prodotto righe per colonne di A per B : in breve, $L_A \circ L_B = L_{A\,B}$. Ne segue allora che

$$dim\big(Im(L_A \circ L_B)\big) \;=\; dim\big(Im(L_{A\,B})\big) \;=\; rg\,(A\,B) \tag{2}$$

Andiamo allora a calcolare la matrice prodotto $A\,B$ e il suo rango. Si ha

$$A\,B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \;=$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 3+(-2)\cdot(-4) & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 1 \\ 2\cdot(-1)+0\cdot 0 & 2\cdot 3+0\cdot(-4) & 2\cdot(-2)+0\cdot 1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 0 & 3\cdot 3+1\cdot(-4) & 3\cdot(-2)+1\cdot 1 \end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ -2 & 6 & -4 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

cioè in sintesi

$$A\,B \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ -2 & 6 & -4 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Possiamo calcolare il rango di tale matrice in due modi:

<u>Primo Modo</u>: riduzione a scala — Riducendo a scala la matrice $A\,B$, il numero di pivot della matrice a scala così ottenuta sarà esattamente $rg\,(A\,B)$: il calcolo diretto dà

$$A\,B \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ -2 & 6 & -4 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ 0 & -16 & 4 \\ 0 & -28 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ 0 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S$$

dove la matrice finale è a scala con *due* pivot; dunque concludiamo che $rg\,(A\,B) = 2$.

<u>Secondo Modo</u>: applicazione del Teorema degli Orlati — Cerchiamo nella matrice $A\,B$ una sottomatrice quadrata Q tale che il suo determinante sia non zero mentre ogni altra sottomatrice quadrata ottenuta "orlando" Q abbia determinante zero: se r è la taglia (cioè il numero di righe, nonché di colonne, equivalentemente) di una tale matrice Q allora avremo $rg\,(A\,B) = r$, per il *Teorema degli Orlati*. Ad esempio, consideriamo la sottomatrice $Q := (A\,B)^{1,2}_{1,2}$ ottenuta selezionando le prime due righe e le prime due colonne, cioè $Q := \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Abbiamo

$$det\,(Q) \;:=\; det \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \;=\; (-1)\cdot 6 - 11\cdot(-2) \;=\; -6+22 \;=\; 16 \;\neq\; 0$$

così che $rg\,(A\,B) \geq 2$. Ora, l'unico modo di "orlare" la sottomatrice $Q := (A\,B)^{1,2}_{1,2}$ ovviamente è aggiungendo la terza riga e la terza colonna, così che si ottiene come sottomatrice 3×3 la matrice $A\,B$ tutta intera; per quest'ultima, calcoliamo il determinante tramite la regola di Sarrus, e troviamo

$$det\,(A\,B) \;=\; det \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ -2 & 6 & -4 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot 6\cdot(-5)+11\cdot(-4)\cdot(-3)+(-4)\cdot(-2)\cdot 5-(-4)\cdot 6\cdot(-3)-(-1)\cdot 5\cdot(-4)-11\cdot(-2)\cdot(-5) =$$

$$= \; 30+132+40-72-20-110 \;=\; 202-202 \;=\; 0$$

cioè $det\,(A\,B) = 0$. Pertanto — come già spiegato — in virtù del *Teorema degli Orlati* otteniamo in definitiva che $rg\,(A\,B) = 2$.

(b) Dalla teoria generale sappiamo che una matrice quadrata è invertibile se e soltanto se il suo determinante è non nullo. Nel caso della matrice $A\,B$, abbiamo visto nel trattare il punto *(a)* che $det(A\,B) = 0$, quindi *la matrice $A\,B$ non è invertibile.*

Passiamo ora a calcolare il nucleo della matrice $A\,B$, cioè l'insieme

$$Ker(A\,B) \;:=\; \left\{\underline{x} := (x_1\,,x_2\,,x_3) \in \mathbb{Q}^3 \,\middle|\, A\,B\,\underline{x} = \underline{0}\right\}$$

che non è altro che l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo con $A\,B$ come matrice dei coefficienti. Si tratta dunque del sistema

$$\circledast\;:\;\begin{cases} -x_1 + 11\,x_2 - 4\,x_3 \;=\; 0 \\ -2\,x_1 + 6\,x_2 - 4\,x_3 \;=\; 0 \\ -3\,x_1 + 5\,x_2 - 5\,x_3 \;=\; 0 \end{cases} \tag{3}$$

Lo risolviamo descrivendolo tramite la sua matrice dei coefficienti (non c'è bisogno di precisare la colonna dei termini noti, perché fatta di soli zeri, e tale poi rimane in ogni successiva manipolazione...), che è appunto $A\,B$, che riduciamo a scala come segue

$$A\,B \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ -2 & 6 & -4 \\ -3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ 0 & -16 & 4 \\ 0 & -28 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 11 & -4 \\ 0 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S$$

(*N.B.:* è stato già fatto nel trattare il punto *(a)* in precedenza). La matrice a scala S che troviamo alla fine del processo ha due pivot, in prima e seconda colonna: dunque il sistema omogeneo descritto da S — che è equivalente a quello iniziale, dunque ha di nuovo $Ker(A\,B)$ come insieme di soluzioni! — ha esattamente una variabile libera, precisamente la x_3 (in terza colonna): quindi possiamo prendere la x_3 come parametro, e il nucleo $Ker(A\,B)$ — come sottospazio vettoriale di $\mathbb{Q}^3$ — avrà dimensione 1. Dunque passiamo al sistema descritto da S, equivalente a quello in (3), che risolviamo come segue:

$$\circledast_S\;:\;\begin{cases} -x_1 + 11\,x_2 - 4\,x_3 \;=\; 0 \\ \qquad -16\,x_2 + 4\,x_3 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad\qquad 0 \;=\; 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -x_1 \;=\; -11\,x_2 + 4\,x_3 \\ -16\,x_2 \;=\; -4\,x_3 \\ \qquad 0 \;=\; 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -x_1 \;=\; -11\,x_2 + 4\,x_3 \\ -4\,x_2 \;=\; -x_3 \\ \quad x_3 \;=\; t \end{cases} \big(t \in \mathbb{Q}\big) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 \;=\; -5/4 \cdot t \\ x_2 \;=\; 1/4 \cdot t \\ x_3 \;=\; t \end{cases} \big(t \in \mathbb{Q}\big)$$

In conclusione quindi abbiamo

$$Ker(A\,B) \;=\; \left\{\big(-5/4 \cdot t\,,\, 1/4 \cdot t\,,\, t\big) \,\middle|\, t \in \mathbb{Q}\right\}$$

che possiamo anche riscrivere — cambiando formalmente parametro, da t a $\tau := 1/4 \cdot t$ — nella forma

$$Ker(A\,B) \;=\; \left\{\big(-5\,\tau\,,\,\tau\,,\,4\,\tau\big) \,\middle|\, \tau \in \mathbb{Q}\right\}$$

(c) Cominciamo calcolando la matrice prodotto $B\,A$. Il calcolo diretto ci dà

$$B\,A \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \;=$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 3 & (-1)\cdot(-2) + 3\cdot 0 + (-2)\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + (-4)\cdot 2 + 1\cdot 3 & 0\cdot(-2) + (-4)\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè in sintesi

$$B\,A \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Per teoria generale sappiamo che una matrice quadrata è invertibile se e soltanto se il suo determinante è non nullo; calcoliamo quindi il determinante della matrice $B\,A$, che è

$$det\,(B\,A) \;=\; (-1)\cdot 1 - 0\cdot(-5) \;=\; -1 \;\neq\; 0$$

(*N.B.:* questo segue anche dal fatto che la matrice $B\,A$ è di forma triangolare (inferiore), perciò sappiamo che il suo determinante è semplicemente il prodotto dei coefficienti sulla sua diagonale: nel caso in esame $det\,(B\,A) \;=\; (-1)\cdot 1 - 1 \neq 0$). Grazie alla (4) allora concludiamo che *la matrice $B\,A$ è invertibile.*

Per calcolare la matrice inversa $(B\,A)^{-1}$ di $B\,A$, possiamo procedere in due modi:

<u>Primo Modo</u>: *doppia Eliminazione di Gauss* — l'algoritmo diretto ci dà

$$\big(\,B\,A \,\big|\, I_2\,\big) \;=\; \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

dove la matrice (doppia) finale rappresenta $\big(\,I_2 \,\big|\, (B\,A)^{-1}\,\big)$: dunque concludiamo che

$$(B\,A)^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

In particolare, casualmente capita che la matrice inversa trovata sia uguale a quella di partenza... *Naturalmente* questo risultato può essere verificato, controllando che le due matrici prodotto

$$A\,B\cdot(B\,A)^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (B\,A)^{-1}\cdot A\,B \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

coincidano entrambe con la matrice identità I_2. In questo caso particolare la verifica è anche più semplice del solito perché i due prodotti da fare sono già formalmente uguali (succede perché la matrice che abbiamo trovato come "presunta inversa" coincide con la matrice di partenza), quindi in effetti basta calcolarne uno solo...

Si noti anche che la procedura di "doppia eliminazione di Gauss" è stata più semplice del solito perché la matrice di partenza era già triangolare inferiore.

<u>Secondo Modo</u>: *formula esplicita per l'inversa* — Ricordiamo che se una matrice quadrata $C = \big(c_{i,j}\big)_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;}$ ha $det\,(C) \neq 0$ allora è invertibile, con inversa data da

$$C^{-1} \;=\; \Big((-1)^{i+j}\, det\big(c_{r,s}\big)_{r=1,\dots,n;\, r\neq j}^{s=1,\dots,n;\, s\neq i}\, det\,(C\,)^{-1}\Big)_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;}$$

Applicando tale formula alla matrice $C \;:=\; B\,A \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ — per la quale è $det\,(B\,A) = -1$ — troviamo

$$(B\,A)^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} (+1)\cdot 1\cdot(-1)^{-1} & (-1)\cdot 0\cdot(-1)^{-1} \\ (-1)\cdot(-5)\cdot(-1)^{-1} & (+1)\cdot(-1)\cdot(-1)^{-1} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

che è lo stesso risultato già ottenuto in (4).

[2] — Affrontiamo i vari quesiti punto per punto.

(a) Per ogni $t \in \mathbb{C}$, consideriamo la matrice

$$M_t \; := \; \big(u(t) \,\big|\, v(t) \,\big|\, w(t) \big) \; = \; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-t \\ t+4 & -2\,t-4 & t^2-8 \\ t-6 & 6 & 15-6\,t \end{pmatrix} \; \in \; M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

le cui colonne sono i vettori $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$. Per definizione, il rango $rg\,(M_t)$ di tale matrice è proprio la dimensione del sottospazio $V'_t := Span\big(u(t), v(t), w(t)\big)$ che ci interessa, cioè $dim\big(V'_t\big) = rg\,(M_t)$: andiamo allora a risolvere il nostro problema calcolando tale rango, in due modi diversi.

<u>Primo Modo</u>: *riduzione a scala* — Riduciamo a scala la matrice M_t: nella matrice a scala S_t così ottenuta, il numero di pivot sarà il rango di M_t. Il calcolo esplicito ci dà

$$\begin{aligned} M_t \; = \; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-t \\ t+4 & -2\,t-4 & t^2-8 \\ t-6 & 6 & 15-6\,t \end{pmatrix} \; &\rightsquigarrow \; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-t \\ 0 & 4 & 4-t \\ 0 & -6+2\,t & -t^2+3\,t-3 \end{pmatrix} \; \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-t \\ 0 & 4 & 4-t \\ 0 & 0 & \big(t^2+t-6\big)\big/(-2) \end{pmatrix} \; =: \; S_t \end{aligned} \qquad (5)$$

Ora, la matrice finale S_t è a scala, con due coefficienti sulla diagonale diversi da 0 — sono -1 e 4 — che quindi sono due pivot, e il terzo e ultimo coefficiente sulla diagonale che è funzione di $t \in \mathbb{C}$, precisamente $s_{3,3}(t) := \big(t^2+t-6\big)\big/(-2)$: se tale coefficiente è diverso da 0 allora è un terzo (e ultimo) pivot, quindi $rg\,(M_t) = 3$; se invece è $s_{3,3}(t) = 0$ allora S_t ha due soli pivot, quindi $rg\,(M_t) = 3$. Dato che

$$s_{3,3}(t) := \big(t^2+t-6\big)\big/(-2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^2+t-6 \,=\, 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t \in \{2\,,-3\} \qquad (6)$$

otteniamo che

$$rg\,(M_t) = 3 \quad \forall\; t \in \big(\mathbb{C} \setminus \{2\,,-3\}\big) \quad , \qquad rg\,(M_t) = 2 \quad \forall\; t \in \{2\,,-3\} \qquad (7)$$

Per finire poi concludiamo che

$$dim\big(V'_t\big) = 3 \quad \forall\; t \in \big(\mathbb{C} \setminus \{2\,,-3\}\big) \quad , \qquad dim\big(V'_t\big) = 2 \quad \forall\; t \in \{2\,,-3\} \qquad (8)$$

<u>Secondo Modo</u>: *applicazione del Teorema degli Orlati* — Calcoliamo il determinante della matrice M_t tramite la regola di Sarrus:

$$\begin{aligned} det\,(M_t) \; &= \; det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-t \\ t+4 & -2\,t-4 & t^2-8 \\ t-6 & 6 & 15-6\,t \end{pmatrix} \; = \\ &= \; (-1)\,(-2\,t-4)\,(15-6\,t) \,+\, 2\,\big(t^2-8\big)\,(t-6) \,+\, 6\,(t+4)\,(3-t) \,+ \\ &\qquad -(-2\,t-4)\,(3-t)\,(t-6) \,-\, (-1)\,6\,\big(t^2-8\big) \,-\, (15-6\,t)\,2\,(t+4) \; = \\ &= \; \big(30\,t-12\,t^2+60-24\,t\big) \,+\, \big(2\,t^3-12\,t^2-16\,t+96\big) \,+\, \big(18\,t+72-24\,t-6\,t^2\big) \,+ \\ &+ \big(6\,t^2-36\,t-2\,t^3+12\,t^2+12\,t-72-4\,t^2+24\,t\big) + \big(6\,t^2-48\big) + \big(12\,t^2-30\,t-120+48\,t\big) \; = \\ &= \; (2-2)\,t^3 \,+\, (-12-12-6+6+12-4+12+6)\,t^2 \,+ \\ &+ (30-24-16+18-24-36+12+24-30+48)\,t \,+\, (60+96+72-72-48-120) \; = \\ &= \; 2\,t^2 \,+\, 2\,t \,-\, 12 \;=\; 2\,\big(t^2+t-6\big) \end{aligned}$$

dunque $det(M_t) = 2\big(t^2+t-6\big)$. Si noti che questo è coerente con quanto trovato in precedenza, in quanto dalla riduzione a scala ottenuta in (5) si può calcolare $det(M_t)$ come prodotto dei coefficienti sulla diagonale della matrice a scala S_t , e tale prodotto è proprio $2\big(t^2+t-6\big)$.

A questo punto osserviamo che, essendo M_t una matrice quadrata di ordine 3 si ha $rg(M_t) = 3 \iff det(M_t) \neq 0$, quindi dalla formula già trovata per $det(M_t)$ deduciamo

$$rg(M_t) = 3 \iff det(M_t) \neq 0 \iff t^2+t-6 \neq 0 \iff t \in \big(\mathbb{C} \setminus \{2,-3\}\big)$$

— che è coerente con la prima parte di (7). In conclusione abbiamo allora

$$dim\big(V_t'\big) = 3 \qquad \forall\ t \in \big(\mathbb{C} \setminus \{2,-3\}\big)$$

— che è coerente con la prima parte di (8).

Inoltre, se consideriamo la sottomatrice $M_t' := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ t-6 & 6 \end{pmatrix}$ — quadrata di ordine 2 — estratta dalle righe prima e terza e dalle colonne prima e seconda di M_t abbiamo

$$det\big(M_t'\big) = det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ t-6 & 6 \end{pmatrix} = (-1)\cdot 6 - 2\cdot(t-6) = 6-2t$$

così $det\big(M_t'\big) = 6-2t \neq 0$ per ogni $t \neq 3$. Ne segue in particolare che $det\big(M_t'\big) \neq 0$ per $t \in \{2,-3\}$, cioè quando $det(M_t) = 0$: perciò dal *Teorema degli Orlati* possiamo concludere che

$$rg(M_t) = 2 \qquad \forall\ t \in \{2,-3\}$$

— come già trovato nella seconda parte di (7) — e quindi in particolare

$$dim\big(V_t'\big) = 2 \qquad \forall\ t \in \{2,-3\}$$

— coerentemente con la seconda parte di (8).

(b) Dalla teoria generale sappiamo che una base del sottospazio V_t' si può ottenere riducendo a scala la matrice M_t e prendendone le colonne che stanno nelle posizioni in cui si trovano i pivot nella matrice a scala S_t ottenuta con tale riduzione. Dall'analisi fatta per il punto *(a)* sappiamo già — per la (5) e la (6) — che:

— per ogni $t \in \big(\mathbb{C} \setminus \{2,-3\}\big)$ la matrice S_t ha tre pivot, dunque le tre colonne di M_t formano una base di V_t' , così che

$$\mathcal{B}_t' := \big\{u(t), v(t), w(t)\big\} \quad \text{è base di } V_t' \text{ per ogni } t \in \big(\mathbb{C} \setminus \{2,-3\}\big)$$

— per ogni $t \in \{2,-3\}$ la matrice S_t ha due pivot, in prima e seconda colonna, perciò le prime due colonne di M_t formano una base di V_t' , precisamente

$$\mathcal{B}_t' := \big\{u(t), v(t)\big\} \quad \text{è base di } V_t' \text{ per ogni } t \in \{2,-3\}$$

(c) Per costruzione, la funzione $f_t : V \longrightarrow V$ assegnata è l'unica funzione lineare da $V := \mathbb{Q}^3$ in sé stesso descritta, rispetto alla base canonica di $V := \mathbb{Q}^3$ — dalla matrice

M_t : in simboli (usando una notazione standard), è $f_t = L_{M_t}$. Pertanto, dalla teoria generale sappiamo che

$$\textit{la funzione } f_t = L_{M_t} \textit{ è invertibile} \iff \textit{la matrice } M_t \textit{ è invertibile.}$$

Ora, a sua volta abbiamo

$$\textit{la matrice } M_t \textit{ è invertibile} \iff det\,(M_t) \neq 0$$

e dall'analisi fatta per il punto *(a)* sappiamo già che

$$det\,(M_t) \neq 0 \iff t \in \big(\mathbb{C} \setminus \{2\,,-3\}\big)$$

Mettendo in fila tutti questi passaggi intermedi otteniamo in conclusione che

$$\textit{la funzione } f_t = L_{M_t} \textit{ è invertibile} \iff t \in \big(\mathbb{C} \setminus \{2\,,-3\}\big)$$

[3] — Per definizione lo spazio affine assegnato $\mathcal{S}$ è l'insieme delle soluzioni — nello spazio affine $\mathcal{A}^4_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}^4$ — del sistema lineare espresso dalle sue "equazioni cartesiane"

$$\circledast_{\mathcal{S}} : \begin{cases} x_3 + 2\,x_4 = 3 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 - 2\,x_3 = 4 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 = 7 \end{cases} \tag{9}$$

trovare "equazioni parametriche" per $\mathcal{S}$ poi significa fornire una descrizione esplicita — in funzione di opportuni parametri — di tale insieme di soluzioni del sistema $\circledast_{\mathcal{S}}$. In virtù del *Teorema di Struttura* per l'insieme delle soluzioni si un sistema lineare, sappiamo che una tale descrizione sarà della forma

$$\mathcal{S} = P_0 + V_{\mathcal{S}} \tag{10}$$

dove P_0 è un qualche punto in $\mathcal{S}$ e $V_{\mathcal{S}}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$, detto *spazio di giacitura* di $\mathcal{S}$; in particolare, per definizione abbiamo $dim\,(\mathcal{S}) := dim\,(V_{\mathcal{S}})$ e possiamo anche interpretare $\mathcal{S}$ come l'unico sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ passante per l'origine O del sistema di riferimento fissato in $\mathcal{A}^4_{\mathbb{R}}$, parallelo a $\mathcal{S}$ della stessa dimensione di $\mathcal{S}$.

Passando ora a rispondere ai vari quesiti posti, cominciamo col risolvere il sistema lineare $\circledast_{\mathcal{S}}$. Tale sistema ha matrice dei coefficienti, colonna di termini noti e matrice completa dati da

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad , \quad \big(A \,\big|\, \underline{b}\,\big) := \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

noi quindi lavoriamo direttamente sulla matrice completa, riducendola a scala. Il calcolo diretto di dà

$$\big(A \,\big|\, \underline{b}\,\big) := \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{3^a \text{ riga} \mapsto 1^a \text{ riga}}]{\substack{1^a \text{ riga} \mapsto 2^a \text{ riga} \\ 2^a \text{ riga} \mapsto 3^a \text{ riga}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{3^a \mapsto 3^a - 1^a}$$

$$\xrightarrow{3^a \mapsto 3^a - 1^a} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{3^a \mapsto 3^a + 2^a} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \big(\varSigma \,\big|\, \underline{c}\,\big)$$

dove Σ è una matrice a scala con esattamente due pivot. Quindi $2 = rg(\Sigma) = rg(A)$.

Passiamo ora a rispondere ai vari quesiti posti.

(a) Per costruzione, lo spazio di giacitura $V_{\mathcal{S}}$ di $\mathcal{S}$ ha equazioni cartesiane della forma $\circledast_{V_{\mathcal{S}}} : A\,\underline{x} = \underline{0}$ — in breve, basta sostituire al sistema lineare che descrive $\mathcal{S}$ l'unico sistema lineare *omogeneo* ad esso associato. Per il *Teorema della Dimensione*, lo spazio delle soluzinoi di tale sistema — che è esattamente $V_{\mathcal{S}} = Ker(A)$ — ha dimensione

$$dim\big(V_{\mathcal{S}}\big) \;=\; dim\big(Ker(A)\big) \;=\; dim\big(\mathbb{R}^4\big) - dim\big(Im(A)\big) \;=\; 4 - rg(A) \;=\; 4-2 \;=\; 2$$

perché abbiamo già trovato che $rg(A) = 2$. Allora $dim\big(V_{\mathcal{S}}\big) = 2$ e da questo e da $dim(\mathcal{S}) := dim\big(V_{\mathcal{S}}\big)$ concludiamo che $dim(\mathcal{S}) = 2$.

(b) Per determinare equazioni parametriche di $\mathcal{S}$ dobbiamo risolvere esplicitamente il sistema lineare $\circledast_{\mathcal{S}}$ in (9). Ora, la riduzione a scala $\big(\, A \;\big|\; \underline{b} \,\big) \leadsto \big(\, \Sigma \;\big|\; \underline{c} \,\big)$ già effettuata in precedenza ci mostra che il sistema iniziale $\circledast_{\mathcal{S}} : A\,\underline{x} = \underline{b}$ è equivalente al sistema (a scala!) $\circledast_{\Sigma} : \Sigma\,\underline{x} = \underline{a}$. In quest'ultimo sistema, che esplicitamente è dato da

$$\circledast_{\Sigma} : \begin{cases} 2\,x_1 + 4\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 = 7 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + 2\,x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0 = 0 \end{cases}$$

le colonne in cui *non* ci sono pivot, cioè la seconda e la quarta, corrispondono a variabili libere: perciò risolviamo il sistema rispetto alle *altre* variabili (quelle corrispondenti alle colonne in cui stanno i pivot, cioè la prima e la terza), che possiamo adottare come parametri. Quindi troviamo

$$\circledast_{\Sigma} : \begin{cases} 2\,x_1 + 4\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 = 7 \\ x_3 + 2\,x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\,x_1 + 4\,x_2 - x_3 + 2\,x_4 = 7 \\ x_2 = h \\ x_3 + 2\,x_4 = 3 \\ x_4 = k \end{cases} \big(\, h\,, k \in \mathbb{R} \,\big) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\,x_1 = 7 - 4\,x_2 + x_3 - 2\,x_4 \\ x_2 = h \\ x_3 = 3 - 2\,x_4 \\ x_4 = k \end{cases} \big(\, h\,, k \in \mathbb{R} \,\big) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - 2\,h - 2\,k \\ x_2 = h \\ x_3 = 3 - 2\,k \\ x_4 = k \end{cases} \big(\, h\,, k \in \mathbb{R} \,\big)$$

così che equazioni parametriche per $\mathcal{S}$, come richiesto, sono

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_1 = 5 - 2\,h - 2\,k \\ x_2 = h \\ x_3 = 3 - 2\,k \\ x_4 = k \end{cases} \big(\, h\,, k \in \mathbb{R} \,\big) \tag{11}$$

che poi è un altro modo di dire che $\mathcal{S} = \big\{\, \underline{x} = (\, 5 - 2\,h - 2\,k\,, h\,, 3 - 2\,k\,, k \,) \,\big|\, h\,, k \in \mathbb{R} \,\big\}$.

(c) Per definizione, ogni spazio affine parallelo ad $\mathcal{S}$ e della stessa dimensione ha lo stesso *spazio di giacitura* di $\mathcal{S}$ — in formule, $V_{\mathcal{S}'} = V_{\mathcal{S}}$ (secondo la notazione già introdotta per gli spazi di giacitura).

Ricordiamo poi che nelle equazioni parametriche di un sottospazio affine, la parte *costante* indica le coordinate di un punto P_0 appartenente al suddetto sottospazio, mentre la parte *lineare* — in funzione dei parametri — descrive i vettori dello spazio di giacitura: in particolare, le stringhe dei coefficienti dei parametri rappresentano un insieme di *vettori di giacitura*, cioè vettori che generano lo spazio di giacitura. Ad esempio, nel caso del sottospazio $\mathcal{S}$ in esame dalle equazioni parametriche in (11) leggiamo che $P_0 = (5\,,0\,,3\,,0)$ è un punto in $\mathcal{S}$ mentre i vettori $v_1 := (-2\,,1\,,0\,,0)$ e $v_2 = (-2\,,0\,,-2\,,1)$ generano lo spazio di giacitura di $\mathcal{S}$, che esplicitamente è dato da

$$V_{\mathcal{S}} \;=\; \big\{\, v := h\,v_1 + k\,v_2 \;\big|\; h\,,k \in \mathbb{R} \,\big\} \tag{12}$$

In sintesi, per il sottospazio $\mathcal{S}$ in esame la descrizione in (10) si fa con $P_0 = (5\,,0\,,3\,,0)$ e $V_{\mathcal{S}}$ descritto dalla (12).

A questo punto, equazioni parametriche per l'unico sottospazio affine $\mathcal{S}'$ di $\mathcal{A}^4_{\mathbb{R}}$ che sia parallelo a $\mathcal{S}$, abbia la stessa dimensione e passi per il punto $P'_0 := (\,3\,,-1\,,2\,,1\,)$ si scrivono ancora nella forma (9) con P'_0 al posto di P_0 — per la condizione $P'_0 \in \mathcal{S}'$ — e con $V_{\mathcal{S}}$ che resta invariato, perché $V_{\mathcal{S}'} = V_{\mathcal{S}}$ — per le due condizioni di parallelismo $\mathcal{S}' \parallel \mathcal{S}$ e di equidimensionalità $\mathit{dim}\big(\mathcal{S}'\big) = \mathit{dim}\,(\mathcal{S})$. Quando andiamo a esplicitarla, la descrizione

$$\mathcal{S}' \;=\; P'_0 + V_{\mathcal{S}'} \;=\; P'_0 + V_{\mathcal{S}}$$

data dalla (9) diventa, cambiando le costanti in (11), il seguente pacchetto di equazioni parametriche per $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{S}' \;:\; \begin{cases} x_1 \;=\; 3 - 2\,h - 2\,k \\ x_2 \;=\; -1 + h \\ x_3 \;=\; 2 - 2\,k \\ x_4 \;=\; 1 + k \end{cases} \qquad \big(\,h\,,k \in \mathbb{R}\,\big)$$

[4] — In questo problema dobbiamo studiare una matrice con coefficienti interi, e come tali possono essere interpretati (secondo il contesto) come elementi di $\mathbb{Q}$ oppure come elementi di $\mathbb{Z}_5$. Ovviamente i due contesti sono diversi, però alcune proprietà sono comuni, per cui possiamo fare vari calcoli e considerazioni che saranno validi in entrambi i casi. In alternativa, si possono trattare i due casi separatamente, in modo autonomo: ci saranno da fare considerazioni analoghe ma il contesto diverso darà alcune differenze pratiche, con vantaggi e svantaggi. Nel seguito tratteremo i diversi punti separatamente, MA indicheremo chiaramente come possano essere trattati in parallelo, oppure separatamente.

(a) Dovendo calcolare lo spettro di A — quando $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ — ricordiamo innanzi tutto che lo spettro di una matrice M è l'insieme dei suoi autovalori, e questi ultimi a loro volta si caratterizzano (anche) come radici del *polinomio caratteristico* di M, definito come $P_M(x) := \mathit{det}\,(M - x\,I_n)$, dove n è l'ordine della matrice. Nel caso in esame dunque

$$\mathit{Sp}\,(A) \;=\; \textit{spettro di } A \;=\; \big\{\, \text{radici di } p_A(x) \big\}$$

con

$$p_a(x) \ := \ det\,(A - x\,I_4) \ = \ det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix}$$

Per calcolare tale determinante, osserviamo che nella quarta riga c'è un solo coefficiente diverso da 0: effettuiamo quindi lo sviluppo di Laplace lungo la quarta riga e troviamo

$$p_a(x) \ := \ det\,(A - x\,I_4) \ = \ det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x \end{pmatrix} \ =$$

$$= \ (-1)^{4+4} \cdot (-1-x) \cdot det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -5 \\ 0 & 3-x & 0 \\ -5 & 0 & -1-x \end{pmatrix} \ = \ (-1-x) \cdot det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -5 \\ 0 & 3-x & 0 \\ -5 & 0 & -1-x \end{pmatrix}$$

Nell'ultimo determinante che compare qui sopra, abbiamo un solo elemento non nullo sulla seconda riga, e altrettanto sulla seconda colonna: perciò conviene calcolare il determinante facendo lo sviluppo di Laplace lungo la seconda riga oppure la seconda colonna; scegliamo quest'ultima opzione, e troviamo

$$p_a(x) = (-1-x) \cdot det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -5 \\ 0 & 3-x & 0 \\ -5 & 0 & -1-x \end{pmatrix} = (-1-x) \cdot (-1)^{2+2} \cdot (3-x) \cdot det \begin{pmatrix} 1-x & -5 \\ -5 & -1-x \end{pmatrix} =$$

$$= \ (-1-x) \cdot (3-x) \cdot \big((1-x) \cdot (-1-x) - (-5) \cdot (-5) \big) \ = \ (-1-x) \cdot (3-x) \cdot \big(x^2 - 2\,x - 24 \big)$$

in sintesi

$$p_a(x) \ = \ (-1-x) \cdot (3-x) \cdot \big(x^2 - 2\,x - 24 \big) \tag{13}$$

da cui *vediamo subito* che le radici di $p_A(x)$ — cioè appunto gli autovalori che andiamo cercando... — sono $\lambda_1 := -1$, $\lambda_2 := 3$ e le radici del polinomio di secondo grado $\big(x^2 - 2\,x - 24 \big)$, che sono $\lambda_3 := -4$, $\lambda_4 := 6$. Quindi, in conclusione, *per* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ *lo spettro di* A *è*

$$Sp\,(A) \ = \ \big\{ -1\,, 3\,, -4\,, 6 \big\}$$

<u>*NOTA*</u>*:* se si sviluppano i prodotti in (13) si ottiene per $p_a(x)$ l'espressione

$$p_a(x) \ = \ x^4 \ - \ 4\,x^3 \ - \ 23\,x^2 \ + \ 54\,x \ + \ 72 \tag{14}$$

D'altra parte, a noi $p_A(x)$ interessa perché ne vogliamo conoscerne le radici: allora è *del tutto controproducente passare dall'espressione (13) all'espressione (14) e poi andare a determinare le radici di* $p_A(x)$ *da quest'ultima espressione* (col metodo di Ruffini o qualunque altro che sia) rfettamente, perché è molto più facile invece dedurle dall'espressione (13), nella quale le prime due radici — -1 e 3 — sono già del tutto evidenti...

(b) Per calcolare lo spettro di A quando $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_5$ possiamo riciclare l'analisi fatta per il punto *(a)*. Infatti, i calcoli fatti in quel caso sono ancora del tutto validi, e danno per $p_A(x)$ la stessa espressione data in (13). Ora però le radici –1 , 3 , -4 e 6 di tale

polinomio *non sono tutte distinte*, in quanto abbiamo -4 e 6 sono congruenti modulo 5 (la loro differenza è -10, che è multiplo di 5), quindi in $\mathbb{Z}_5$ coincidono (cioè, rappresentano la stessa classe di congruenza modulo 5). Quindi in questo caso il polinomio caratteristico ha esattamente tre radici distinte (in quanto $-4 = 6$ ma $-1 \neq 3$, $-1 \neq -4$, $3 \neq -4$ in $\mathbb{Z}_5$), invece che quattro. In conclusione, *per* $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ *lo spettro di* A è

$$Sp(A) \;=\; \big\{-1\,,3\,,-4\big\}$$

(c) Dalla teoria generale sappiamo che, siccome per $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ lo spettro di A ha esattamente 4 elementi, e 4 è la dimensione dello spazio $V := \mathbb{Q}^4$ su cui opera A, possiamo concludere che A è *certamente diagonalizzabile*.

Cerchiamo ora una base di autovettori di A: una tale base sarà fatta di un autovettore (non nullo!) per ciascun autovalore, cioè un elemento non nullo di ciascun autospazio. Andiamo quindi a calcolare i quattro autospazi V_λ di A relativi ai quattro diversi autovalori $\lambda \in Sp(A) = \big\{-1\,,3\,,-4\,,6\big\}$, dove

$$V_\lambda \;:=\; \big\{\, v \in V := \mathbb{Q}^4 \;\big|\; A\,v = \lambda\,v \,\big\} \qquad \forall\;\lambda \in \mathbb{Q}$$

Osserviamo anche che la dimensione di ciascuno degli autospazi — che è pari (per definizione!) alla molteplicità geometrica del relativo autovalore — ha dimensione 1: infatti, per definizione stessa di autovalore abbiamo senz'altro $m^G_\lambda = dim(V_\lambda) \geq 1$, e quindi

$$m^G_{-1} + m^G_3 + m^G_{-4} + m^G_6 \;\geq\; 4 \;=\; dim\big(\mathbb{Q}^4\big) \;=\; dim(V)$$

per cui in definitiva dev'essere appunto m^G_λ per ogni $\lambda \in Sp(A) = \big\{-1\,,3\,,-4\,,6\big\}$.

Per costruzione si ha $V_\lambda = Ker(A - \lambda\,I_4)$, quindi calcolare ciascun autospazio significa calcolare l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo $\circledast_\lambda : (A - \lambda\,I_4)\,\underline{x} = \underline{0}$; per risolvere tale sistema, procediamo a ridurne a scala la matrice dei coefficienti (non c'è bisogno di tener conto dei termini noti, perché sono tutti nulli). Procediamo ora a distinguere i vari casi:

$\underline{\lambda = -1}$ — In questo caso il calcolo diretto ci dà

$$(A - \lambda\,I_4) \;=\; (A + I_4) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -21/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=:\; S_{-1}$$

quindi il sistema omogeneo $\circledast_{-1} : (A + I_4)\,\underline{x} = \underline{0}$ corrisponde al sistema omogeneo $\circledast^{(S)}_{-1} : S_{-1}\,\underline{x} = \underline{0}$ con matrice a scala, che esplicitamente è

$$\circledast^{(S)}_{-1} \;:\; \begin{cases} 2\,x_1 \;-\; 5\,x_3 \;=\; 0 \\ 4\,x_2 \;+\; 2\,x_4 \;=\; 0 \\ -21/2 \cdot x_3 \;=\; 0 \\ 0 \;=\; 0 \end{cases}$$

e ha soluzioni

$$\circledast^{(S)}_{-1} \;:\; \begin{cases} x_1 \;=\; 0 \\ x_2 \;=\; a \\ x_3 \;=\; 0 \\ x_4 \;=\; -2\,a \end{cases} \qquad \big(\, a \in \mathbb{Q} \,\big)$$

così che l'autospazio cercato è

$$V_{-1} \;=\; Ker\,(A+I_4) \;=\; \big\{\,(\,0\,,a\,,0\,,-2\,a\,)\;\big|\;a\in\mathbb{Q}\,\big\} \tag{15}$$

Un qualunque vettore non nullo in tale autospazio sarà un autovettore che possiamo scegliere come parte della base richiesta: fissando il valore del parametro $a := 1$ troviamo l'autovettore $v_{-1} := (\,0\,,1\,,0\,,-2\,)$ — ma ovviamente ogni altra scelta di un qualsiasi valore $a \neq 0$ va altrettanto bene.

$\underline{\lambda = 3}$ — Per questo secondo autovalore il calcolo diretto ci dà

$$(A-\lambda\,I_4) \;=\; (A-3\,I_4) \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a\text{ r.} \;\mapsto\; 3^a\text{ r. - }5/2\;(1^a\text{ r.})}$$

$$\xrightarrow{3^a\text{ r.} \;\mapsto\; 3^a\text{ r. - }5/2\;(1^a\text{ r.})} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 21\big/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^a\text{ riga}\,\mapsto\,2^a\text{ riga}]{2^a\text{ riga}\,\mapsto\,3^a\text{ riga}}$$

$$\xrightarrow[3^a\text{ riga}\,\mapsto\,2^a\text{ riga}]{2^a\text{ riga}\,\mapsto\,3^a\text{ riga}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 21\big/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{4^a \;\mapsto\; 4^a + 2\,(3^a)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 21\big/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =:\; S_3$$

da cui segue che il sistema omogeneo $\circledast_3 \,:\, (A-3\,I_4)\,\underline{x} \,=\, \underline{0}$ corrisponde al sistema omogeneo $\circledast_3^{(S)} : S_3\,\underline{x} = \underline{0}$ con matrice a scala, che esplicitamente è

$$\circledast_3^{(S)} \;:\; \begin{cases} -2\,x_1 \,-\, 5\,x_3 \;=\; 0 \\ \qquad 21\big/2 \cdot x_3 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad 2\,x_4 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad\quad 0 \;=\; 0 \end{cases}$$

ed ha soluzioni

$$\circledast_3^{(S)} \;:\; \begin{cases} x_1 \,=\, 0 \\ x_2 \,=\, b \\ x_3 \,=\, 0 \\ x_4 \,=\, 0 \end{cases} \quad \big(\,b\in\mathbb{Q}\,\big)$$

e quindi l'autospazio cercato è

$$V_3 \;=\; Ker\,(A-3\,I_4) \;=\; \big\{\,(\,0\,,b\,,0\,,0\,)\;\big|\;b\in\mathbb{Q}\,\big\} \tag{16}$$

<u>N.B.</u>: questo risultato si poteva anche ottenere senza calcoli: infatti, ricordando che le colonne di una matrice rappresentano le immagini (tramite l'applicazione lineare associata alla matrice stessa) dei vettori della base canonica, osservando che nel caso della matrice $(A-3\,I_4)$ la seconda colonna è fatta tutta di zeri, ne deduciamo che il secondo vettore $\underline{e}_2 := (0\,,1\,,0\,,0)$ della base canonica di $V := \mathbb{Q}^4$ ha per immagine secondo

$(A - 3\, I_4)$ il vettore nullo, dunque appartiene al nucleo di $(A - 3\, I_4)$. Poiché sappiamo già che tale nucleo ha dimensione 1, e il vettore $\underline{e}_2$ — che vi è contenuto — è non nullo, possiamo concludere che $\underline{e}_2$ forma una base di $Ker(A - 3\, I_4) = V_3$, che quindi è composto esattamente da tutti e soli i vettori multipli di $\underline{e}_2$, cioè del tipo $b\,\underline{e}_2 = (0, b, 0, 0)$ al variare di $b \in \mathbb{Q}$, dunque è dato esattamente dalla (16).

Infine, un qualunque vettore non nullo nell'autospazio V_3 descritto in (16) sarà un autovettore che possiamo selezionare come parte della base richiesta: fissando il valore del parametro $b := 1$ otteniamo l'autovettore $v_3 := (0, 1, 0, 0)$ — poi ovviamente ogni altra scelta di un qualsiasi valore $b \neq 0$ va altrettanto bene.

$\underline{\lambda = -4}$ — Per questo terzo autovalore il calcolo diretto ci dà

$$(A - \lambda\, I_4) \;=\; (A + 4\, I_4) \;=\; \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a \text{ r. } \mapsto\, 3^a \text{ r. } + 1^a \text{ r.}}$$

$$\xrightarrow{3^a \text{ r. } \mapsto\, 3^a \text{ r. } + 1^a \text{ r.}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3^a \text{ r. } \mapsto\, 4^a \text{ r.} \\ 4^a \text{ r. } \mapsto\, 3^a \text{ r.}}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{-4}$$

da questo segue che il sistema omogeneo $\circledast_{-4} : (A + 4\, I_4)\, \underline{x} = \underline{0}$ corrisponde al sistema omogeneo $\circledast_{-4}^{(S)} : S_{-4}\, \underline{x} = \underline{0}$ con matrice a scala, che esplicitamente è descritto da

$$\circledast_{-4}^{(S)} \; : \; \begin{cases} 5\, x_1 \,-\, 5\, x_3 \;=\; 0 \\ 7\, x_2 \,+\, 2\, x_4 \;=\; 0 \\ \qquad\quad 3\, x_4 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad 0 \;=\; 0 \end{cases}$$

ed ha soluzioni

$$\circledast_{-4}^{(S)} \; : \; \begin{cases} x_1 \,=\, c \\ x_2 \,=\, 0 \\ x_3 \,=\, c \\ x_4 \,=\, 0 \end{cases} \qquad \big(c \in \mathbb{Q} \big)$$

per cui l'autospazio cercato è

$$V_{-4} \;=\; Ker(A + 4\, I_4) \;=\; \big\{ (c, 0, c, 0) \;\big|\; c \in \mathbb{Q} \big\} \tag{17}$$

Un qualsiasi vettore non nullo in tale autospazio sarà un autovettore che possiamo scegliere come parte della base richiesta: fissando il valore del parametro $c := 1$ otteniamo l'autovettore $v_{-4} := (1, 0, 1, 0)$ — poi naturalmente ogni altra scelta di un qualsiasi valore $c \neq 0$ è altrettanto valida.

$\underline{\lambda = 6}$ — Per il quarto autovalore il calcolo diretto ci dà

$$(A - \lambda\, I_4) \;=\; (A - 6\, I_4) \;=\; \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a\,\text{r.} \mapsto 3^a\,\text{r. - } 1^a\,\text{r.}}$$

$$\xrightarrow{3^a\,\text{r.} \mapsto 3^a\,\text{r. - } 1^a\,\text{r.}} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[4^a\,\text{r.} \;\mapsto 3^a\,\text{r.}]{3^a\,\text{r.} \;\mapsto 4^a\,\text{r.}} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_6$$

pertanto il sistema omogeneo $\circledast_6 : (A - 6\, I_4)\, \underline{x} = \underline{0}$ corrisponde al sistema omogeneo $\circledast_6^{(S)} : S_6\, \underline{x} = \underline{0}$ con matrice a scala, che è descritto esplicitamente da

$$\circledast_6^{(S)} \; : \; \begin{cases} -5\, x_1 \,-\, 5\, x_3 \;=\; 0 \\ -3\, x_2 \,+\, 2\, x_4 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad 5\, x_4 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad\quad 0 \;=\; 0 \end{cases}$$

ed ha soluzioni

$$\circledast_6^{(S)} \; : \; \begin{cases} x_1 \;=\; d \\ x_2 \;=\; 0 \\ x_3 \;=\; -d \\ x_4 \;=\; 0 \end{cases} \qquad \big(\, d \in \mathbb{Q} \,\big)$$

per cui l'autospazio cercato è

$$V_6 \;=\; Ker\,(A + 4\, I_4) \;=\; \big\{\, (\, c\,, 0\,, c\,, 0\,) \;\big|\; d \in \mathbb{Q} \,\big\} \tag{18}$$

Un qualunque vettore non nullo in tale autospazio sarà un autovettore che possiamo scegliere come parte della base richiesta: fissando il valore del parametro $d := 1$ otteniamo l'autovettore $v_6 \,:=\, (\, 1\,, 0\,, -1\,, 0\,)$ — ma naturalmente ogni altra scelta di un qualsiasi valore $d \neq 0$ è ugualmente valida.

In conclusione, l'insieme

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} \;:=\; \big\{\, v_{-1}\,, v_3\,, v_{-4}\,, v_6 \,\big\} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{19}$$

è una base di autovettori per A, come richiesto.

(d) Nel caso di $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_5$ lo spettro di A ha esattamente 3 elementi, mentre la dimensione dello spazio $V := \mathbb{Q}^4$ su cui opera A è 4, quindi non possiamo subito concludere che A sia diagonalizzabile: potrebbe esserlo, ma potrebbe anche non esserlo. Dalla teoria generale sappiamo che la condizione per la diagonalizzabilità di A, espressa in termini di molteplicità geometrica dei suoi autovalori, è la seguente:

$$A \text{ è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad m^{\mathcal{G}}_{-1} + m^{\mathcal{G}}_{3} + m^{\mathcal{G}}_{-4} \;=\; dim\big(\mathbb{Q}^4\big) \;=\; 4 \tag{20}$$

e poiché comunque è $m_\lambda^G \geq 1$ per ogni $\lambda \in Sp(A) = \{-1\,,3\,,-4\}$ la (20) può essere riscritta come

$$A \text{ è diagonalizzabile} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\ \lambda \in Sp(A) = \{-1\,,3\,,-4\} \ :\ m_\lambda^G = 2 \tag{21}$$

Cerchiamo ora di capire se la condizione in (21) è soddisfatta, calcolando le varie molteplicità geometriche m_λ^G; a tal fine, ricordiamo che — in virtù delle definizioni e del *Teorema della Dimensione* — si ha

$$\begin{aligned} m_\lambda^G \ := \ dim(V_\lambda) \ &= \ dim\big(Ker(A - \lambda\, I_4)\big) \ = \\ &= \ dim\big(\mathbb{Q}^4\big) - dim\big(Im(A - \lambda\, I_4)\big) \ = \ 4 - rg(A - \lambda\, I_4) \end{aligned} \tag{22}$$

In parallelo calcoliamo anche una base $\mathcal{B}_\lambda$ di ciascun autospazio V_λ, che sarà fatta in ogni caso di un singolo autovettore (non nullo!) oppure — se per $m_\lambda^G = 2$ — da due autovettori linearmente indipendenti; nel caso in cui A risulti diagonalizzabile, l'unione $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_5} := \bigcup_{\lambda \in Sp(A)} \mathcal{B}_\lambda$ sarà una base di $V := \mathbb{Q}^4$ formata di autovettori, come richiesto.

Possiamo ora proseguire seguendo due metodi diversi.

<u>Primo Metodo</u>: Procediamo separatamente per i singoli autovalori $\lambda \in Sp(A) = \big\{-1\,,3\,,-4\big\}$. In ciascun caso *possiamo riciclare i calcoli già svolti per il caso* $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$, opportunamente riletti in base al fatto che ora trattiamo numeri in $\mathbb{Z}_5$ invece che in $\mathbb{Q}$.

<u>$\lambda = -1$</u> — Per questo autovalore il calcolo già svolto per $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ ci dà

$$(A - \lambda\, I_4) \ = \ (A + I_4) \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -21 \cdot 2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \cdot 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{-1}$$

dove abbiamo tenuto conto che in $\mathbb{Z}_5$ si ha $21 = 1$, $2^{-1} = 3$, $-5 = 0$ e $-3 = 2$. Allora il sistema omogeneo $\circledast_{-1} : (A + I_4)\,\underline{x} = \underline{0}$ corrisponde al sistema omogeneo $\circledast_{-1}^{(S)} : S_{-1}\,\underline{x} = \underline{0}$ con matrice a scala; tale matrice ha esattamente 3 pivot, dunque ha rango 3, e quindi dalla (22) otteniamo $m_{-1}^G = 1$, così che l'autospazio V_{-1} ha dimensione 1, e una sua qualunque base $\mathcal{B}_{-1}$ è composta da un unico vettore $v_{-1} \in V_{-1} \setminus \{0\}$. Si noti anche che, se riscriviamo subito $-5 = 0$ nella matrice iniziale A, allora la matrice $(A + I_4)$ assume *da subito* la forma a scala S_{-1}, cioè abbiamo l'identità $(A + I_4) = S_{-1}$ senza alcun bisogno di procedere con una riduzione a scala.

Esplicitamente, il sistema omogeneo a scala $\circledast_{-1}^{(S)} : S_{-1}\,\underline{x} = \underline{0}$ è dato da

$$\circledast_{-1}^{(S)} \ : \ \begin{cases} \phantom{4\,x_2 +{}} 2\,x_1 \ = \ 0 \\ 4\,x_2 \ + \ 2\,x_4 \ = \ 0 \\ \phantom{4\,x_2 +{}} 2\,x_3 \ = \ 0 \\ \phantom{4\,x_2 + 2\,{}} 0 \ = \ 0 \end{cases}$$

che ha soluzioni

$$\circledast_{-1}^{(S)} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = a \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -2\,a \end{cases} \quad \big(\, a \in \mathbb{Z}_5 \,\big)$$

così che l'autospazio cercato è

$$V_{-1} \;=\; Ker\,(A + I_4) \;=\; \big\{\, (\,0\,,a\,,0\,,-2\,a\,) \;\big|\; a \in \mathbb{Z}_5 \,\big\} \tag{23}$$

Dovendo poi scegliere un vettore non nullo v_{-1} in tale autospazio, fissiamo il valore del parametro $a := 1$ che ci dà l'autovettore $v_{-1} := (\,0\,,1\,,0\,,-2\,)$ — comunque, ogni altra scelta di un qualsiasi valore $a \neq 0$ va altrettanto bene — e quindi $\mathcal{B}_{-1} = \big\{ v_{-1} := (\,0\,,1\,,0\,,-2\,) \big\}$ è base di V_{-1} .

Si noti infine che la (23) è formalmente identica alla (15) — basta cambiare $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{Z}_5$.

$\underline{\lambda = 3}$ — Per questo secondo autovalore il calcolo già svolto per $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$ (e ora riscritto per $\mathbb{Z}_5$) ci dà

$$(A - \lambda\, I_4) \;=\; (A - 3\, I_4) \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 21{\cdot}2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[3^a\,\text{r.}\;\mapsto\; 2^a\,\text{r.}]{2^a\,\text{r.}\;\mapsto\; 3^a\,\text{r.}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{4^a \mapsto (4^a + 2\cdot 3^a)}$$

$$\xrightarrow{4^a \mapsto (4^a + 2\cdot 3^a)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =:\; S_3$$

dove abbiamo tenuto conto che in $\mathbb{Z}_5$ si ha $21 \cdot 2^{-1} = 1 \cdot 3 = 3$ e $-5 = 0$. Pertanto il sistema omogeneo $\circledast_3 : (A - 3\,I_4)\,\underline{x} = \underline{0}$ corrisponde al sistema omogeneo $\circledast_3^{(S)} : S_3\,\underline{x} = \underline{0}$ con matrice a scala S_3 che ha esattamente 3 pivot, dunque ha rango 3; perciò dalla (22) otteniamo $m_3^g = 1$, così che l'autospazio V_3 ha dimensione 1 , e una sua qualunque base $\mathcal{B}_3$ è composta da un unico vettore $v_3 \in V_3 \setminus \{0\}$.

In forma esplicita, il sistema omogeneo a scala $\circledast_3^{(S)} : S_3\,\underline{x} = \underline{0}$ è descritto da

$$\circledast_3^{(S)} : \begin{cases} -2\,x_1 = 0 \\ 3\,x_3 = 0 \\ 2\,x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

e quindi ha soluzioni

$$\circledast_3^{(S)} : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = b \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \big(\, b \in \mathbb{Z}_5 \,\big)$$

perciò in definitiva l'autospazio cercato è

$$V_3 \;=\; Ker\,(A - 3\,I_4) \;=\; \big\{\,(\,0\,,b\,,0\,,0\,)\;\big|\;b \in \mathbb{Z}_5\,\big\} \tag{24}$$

Dovendo scegliere un vettore non nullo v_3 in tale autospazio, fissiamo il valore del parametro $b := 1$ e otteniamo l'autovettore $v_3 := (\,0\,,1\,,0\,,0\,)$ — in ogni caso, qualsiasi scelta di un valore $b \neq 0$ va sempre bene — e quindi $\mathcal{B}_3 = \big\{v_{-1} := (\,0\,,1\,,0\,,0\,)\big\}$ è base di V_3.

Si noti infine che la (24) è formalmente identica alla (16) — basta cambiare $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{Z}_5$.

$\underline{\lambda = -4}$ — Per questo terzo e ultimo autovalore il calcolo svolto per $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ e ora reinterpretato ci dà

$$(A - \lambda\,I_4) \;=\; (A + 4\,I_4) \;=\; \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a\text{ r.} \,\mapsto\, 3^a\text{ r.} + 1^a\text{ r.}}$$

$$\xrightarrow{3^a\text{ r.} \,\mapsto\, 3^a\text{ r.} + 1^a\text{ r.}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3^a\text{ r.} \,\mapsto\, 4^a\text{ r.} \\ 4^a\text{ r.} \,\mapsto\, 3^a\text{ r.}}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1^a\text{ r.} \,\mapsto\, 3^a\text{ r.} \\ 2^a\text{ r.} \,\mapsto\, 1^a\text{ r.} \\ 3^a\text{ r.} \,\mapsto\, 2^a\text{ r.}}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =:\; S_{-4}$$

per cui il sistema omogeneo $\circledast_{-4} : (A + 4\,I_4)\,\underline{x} = \underline{0}$ corrisponde al sistema omogeneo $\circledast^{(S)}_{-4} : S_{-4}\,\underline{x} = \underline{0}$ con matrice a scala. Questa volta tale matrice a scala S_{-4} ha esattamente 2 pivot, quindi dalla (22) otteniamo $m^G_{-4} = 2$: da questo possiamo quindi concludere che

per $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ *la matrice* A *è diagonalizzabile.*

Andiamo ora a cercare una base $\mathcal{B}_{-4}$ di V_{-4}: quest'ultimo è il nucleo di $(A + 4\,I_4)$, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $\circledast_{-4} : (A+4\,I_4)\,\underline{x} = \underline{0}$, che a sua volta è equivalente al sistema omogeneo a scala $\circledast^{(S)}_{-4} : S_{-4}\,\underline{x} = \underline{0}$: andiamo quindi a risolvere quest'ultimo. I calcoli espliciti danno

$$\circledast^{(S)}_{-4} \;:\; \begin{cases} 2\,x_1 \;+\; 2\,x_4 \;=\; 0 \\ \qquad\quad\;\; 3\,x_4 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad\;\;\; 0 \;=\; 0 \\ \qquad\qquad\;\;\; 0 \;=\; 0 \end{cases}$$

ed ha soluzioni

$$\circledast^{(S)}_{-4} \;:\; \begin{cases} x_1 \;=\; k \\ x_2 \;=\; 0 \\ x_3 \;=\; \delta \\ x_4 \;=\; 0 \end{cases} \quad \big(\,c \in \mathbb{Q}\,\big)$$

per cui l'autospazio cercato è

$$V_{-4} \;=\; Ker\,(A + 4\,I_4) \;=\; \big\{\,(\,k\,,0\,,\delta\,,0\,)\;\big|\;k\,,\delta \in \mathbb{Z}_5\,\big\} \tag{25}$$

Fissando i valori dei parametri con le due scelte $\big(k', \delta'\big) := (1, 0)$ e $\big(k'', \delta''\big) := (0, 1)$ otteniamo i due autovettori $v'_{-4} := (1, 0, 0, 0)$ e $v''_{-4} := (0, 0, 1, 0)$ che formano la base $\mathcal{B}_{-4} := \big\{ v'_{-4} := (1, 0, 0, 0), v''_{-4} := (0, 0, 1, 0) \big\}$ di v_{-4} — ma anche altre scelte sono possibili, ovviamente.

A questo punto possiamo concludere affermando che

per $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ la matrice A è diagonalizzabile

e che una esplicita base di $V := \mathbb{Z}_5^4$ composta di autovettori per A è data da

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_5} := \bigcup\nolimits_{\lambda \in Sp(A)} \mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B}_{-1} \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_{-4} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{26}$$

<u>Secondo Metodo</u>*:* In alternativa all'analisi precedente (che replica passo per passo quella già fatto nel caso analogo per $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$) si può procedere in modo più sintetico.

In breve, la logica è data da questo

<u>Risultato generale</u>*: Se p è un numero primo, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ è una matrice a coefficienti interi con autovalori interi, e $\overline{A}$ indica la stessa matrice considerata però modulo p — dunque $\overline{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}_p)$ — allora da ogni autovettore (non nullo) di A su $\mathbb{Q}$ con autovalore $\lambda \in \mathbb{Z}$ si può ricavare un autovettore (non nullo) di $\overline{A}$ su $\mathbb{Z}_p$ con autovalore $\overline{\lambda} \in \mathbb{Z}_p$ (la classe di congruenza di λ modulo p).*

Infatti, se $v' = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Q}^n$ è un autovettore (non nullo) di A su $\mathbb{Q}$ (cioè con coefficienti in $\mathbb{Q}$) con autovalore $\lambda \in \mathbb{Z}$, allora esiste un suo multiplo $v := d\, v' \in \mathbb{Z}^n$ non nullo a coefficienti interi (basta scegliere come d un multiplo comune non nullo di tutti i denominatori delle coordinate razionali $c_1, \dots, c_n$ di v'), e questo a sua volta è automaticamente — come tutti i vettori multipli di v' — un autovettore (non nullo) di autovalore λ, cioè $A\, v = \lambda\, v$. Ora riducendo quest'ultima identità modulo p troviamo $\overline{A}\, \overline{v} = \overline{A\, v} = \overline{\lambda\, v} = \overline{\lambda}\, \overline{v}$, cioè $\overline{A}\, \overline{v} = \overline{\lambda}\, \overline{v}$ che vuol dire appunto che $\overline{v}$ è autovettore di $\overline{A}$ con autovalore $\overline{\lambda} \in \mathbb{Z}_p$ (dove con $\overline{v}$ e $\overline{\lambda\, v}$ abbiamo indicato i vettori in $\mathbb{Z}_p$ ottenuti riducendo modulo p le coordinate di v e di $\lambda\, v$ rispettivamente).

Dal suddetto fatto generale allora segue poi facilmente che se A è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$ allora esiste una base $\mathcal{B}'_{\mathbb{Q}} = \big\{ v'_1, \dots, v'_n \big\}$ di $\mathbb{Q}^n$ fatta di autovettori; da questa ne posso ricavare (come spiegato qui sopra nel caso di un singolo autovettore v') un'altra $\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \big\{ v_1, \dots, v_n \big\}$ i cui elementi siano tutti vettori a coordinate in $\mathbb{Z}$, che sono ancora autovettori, e poi da quest'ultima ne posso ottenere — prendendo la "riduzione modulo p" di ciascun vettore — una $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_p} = \big\{ \overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n \big\}$ di $\mathbb{Z}_p^n$ che è ancora fatta di autovettori: in particolare, questo mostra che anche la matrice $\overline{A}$ è diagonalizzabile (sul campo $\mathbb{Z}_p$).

Possiamo applicare queste considerazioni generali al caso della matrice A in esame, perché i suoi coefficienti sono effettivamente tutti numeri interi, come pure i suoi autovalori, e inoltre per il punto *(c)* sappiamo che essa è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$. Allora i risultati generali appena spiegati provano che la stessa matrice considerata sul campo $\mathbb{Z}_5$ (cioè $\overline{A}$, indicata ancora con A per non complicare la notazione!...) è ancora diagonalizzabile.

Detto questo, mostriamo ora che tale risultato si può ottenere direttamente, *senza conoscere il risultato generale*, da quanto già trovato al punto *(c)* lavorando su $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Dall'analisi fatta al punto *(c)* sappiamo che $\mathbb{Q}^n$ ha una base di autovettori di A data da (19), precisamente

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} \;=\; \big\{\, v_{-1}\,, v_3\,, v_{-4}\,, v_6 \,\big\} \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

i cui autovalori associati sono (nell'ordine) -1, 3, 4 e -6. Osserviamo anche che tutti gli autovettori in questa base hanno tutti i coefficienti in $\mathbb{Z}$. Allora ha senso considerare tali vettori *ridotti modulo 5*, cioè considerare l'insieme di quattro vettori in $\mathbb{Z}_5^4$

$$\mathcal{B}'_{\mathbb{Z}_5} \;=\; \left\{ \overline{v}_{-1} = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{-2} \end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \overline{v}_{-4} = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \overline{v}_6 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{-1} \\ \overline{0} \end{pmatrix} \right\} \;\in\; \mathbb{Z}_5^4 \tag{27}$$

Ora, siccome la funzione $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_5\,,\ z \mapsto \overline{z}\,,$ conserva la somma e il prodotto, cioè $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ e $\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ (per ogni $a\,, b \in \mathbb{Z}$), e siccome $A\, v_\lambda = \lambda\, v_\lambda$ per ogni $\lambda \in \{-1\,,3\,,4\,,-6\,\}$, possiamo verificare facilmente che

$$\overline{A}\,\overline{v}_\lambda \;=\; \overline{A\, v_\lambda} \;=\; \overline{\lambda\, v_\lambda} \;=\; \overline{\lambda}\,\overline{v_\lambda} \qquad \text{per ogni} \quad \overline{v}_\lambda \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}_5}$$

Questo significa in particolare che $\overline{A}\,\overline{v}_\lambda = \overline{\lambda}\,\overline{v_\lambda}$ per ogni $\overline{v}_\lambda \in \mathcal{B}_{\mathbb{Z}_5}$, cioè *ogni* $\overline{v}_\lambda$ *è un autovettore per* $\overline{A}$ *con autovalore* $\overline{\lambda} \in \mathbb{Z}_5$: in dettaglio, il primo autovettore $\overline{v}_{-1}$ ha autovalore $\overline{-1} = \overline{4}$, il secondo $\overline{v}_3$ ha autovalore $\overline{3}$, il terzo $\overline{v}_{-4}$ e il quarto $\overline{v}_6$ hanno lo stesso autovalore $\overline{-4} = \overline{1} = \overline{6}$. In particolare — come già trovato in precedenza — questo ci dice che lo spettro di A su $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, cioè $Sp\big(\overline{A}\big)$, contiene (almeno) i tre autovalori distinti $\overline{v}_{-1} = \overline{4}$, $\overline{3}$ e $\overline{v}_{-4} = \overline{v}_1 = \overline{6}$; inoltre, per i relativi autospazi abbiamo

$$\exists \;\; \overline{v}_{-1} \in \big(V_{\overline{4}} \setminus \{0\}\big) \;, \qquad \exists \;\; \overline{v}_3 \in \big(V_{\overline{3}} \setminus \{0\}\big) \;, \qquad \exists \;\; \overline{v}_{-4}\,, \overline{v}_6 \in \big(V_{\overline{1}} \setminus \{0\}\big)$$

Infine, osserviamo che *i due autovettori* $\overline{v}_{-4}\,, \overline{v}_6 \in V_{\overline{1}}$ *sono linearmente indipendenti* (sul campo $\mathbb{K}$): questo segue dal fatto che la matrice

$$\big(\,\overline{v}_{-4} \,\big|\, \overline{v}_6\,\big) \;=\; \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{-1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \;\in\; M_{4\times 2}(\mathbb{Z}_5)$$

di cui essi sono le colonne ha rango 2, in quanto contiene la sottomatrice quadrata $\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{-1} \end{pmatrix}$ — estratta dalle righe prima e terza e dalle colonne prima e seconda — che ha determinante non nullo, in quanto $det\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{-1} \end{pmatrix} = \overline{1}\cdot\big(\overline{-1}\big) - \overline{1}\cdot\overline{1} = \overline{-2} = \overline{3} \neq \overline{0}$, e allora il *Teorema degli Orlati* ci garantisce che $rg\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{-1} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} = 2$. Ora, dal fatto che i due autovettori $\overline{v}_{-4}$ e $\overline{v}_6$ in $V_{\overline{1}}$ siano linearmente indipendenti segue che $m^G_{\overline{1}} := dim\,(V_{\overline{1}}) \geq 2$.

Da questo e dal fatto che $m^G_{\overline{4}} \geq 1$ e $m^G_{\overline{3}} \geq 1$ otteniamo — tenendo conto che comunque $m^G_{\overline{4}} + m^G_{\overline{3}} + m^G_{\overline{1}} \leq dim\left(\mathbb{Z}_5^4\right) = 4$ — che $m^G_{\overline{1}} = 2$, e quindi per la (21) concludiamo che

la matrice $\overline{A}$ su $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ è diagonalizzabile

Inoltre, questa analisi implica anche che $m^G_{\overline{4}} = 1$ e $m^G_{\overline{3}} = 1$, gli autospazi $V_{\overline{4}}$, $V_{\overline{3}}$ e $V_{\overline{1}}$ hanno per basi rispettivamente gli insiemi $\mathcal{B}'_{\overline{4}} := \left\{ \overline{v}_{-1} \right\}$, $\mathcal{B}'_{\overline{3}} := \left\{ \overline{v}_3 \right\}$ e $\mathcal{B}'_{\overline{1}} := \left\{ \overline{v}_{-4}, \overline{v}_6 \right\}$. In conseguenza, otteniamo anche che *una base di $V := \mathbb{Z}_5^4$ composta di autovettori di $\overline{A}$ è data da*

$$\mathcal{B}'_{\mathbb{Z}_5} := \mathcal{B}'_{\overline{4}} \cup \mathcal{B}'_{\overline{3}} \cup \mathcal{B}'_{\overline{1}}$$

che coincide l'insieme dato in (27).

NOTA: Osserviamo che la base data in (26) e quella in (27) sono lievemente diverse tra loro: i primi due elementi nell'una e nell'altra coincidono (a parte per la notazione, lievemente differente), il terzo e il quarto invece no.