

CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018-2019

Esame scritto del 21 Giugno 2019 — Sessione Estiva, I appello

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Si considerino le due matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 2}(\mathbb{Q}) \quad , \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 3}(\mathbb{Q})$$

e siano $L_A : \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ e $L_B : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^2$ le due funzioni lineari ad esse associate nel modo canonico.

(a) Calcolare $\dim(\text{Im}(L_A \circ L_B))$.

(b) Determinare se la matrice AB (prodotto righe per colonne) sia invertibile; in caso positivo se ne calcoli esplicitamente la matrice inversa, in caso negativo se ne calcoli esplicitamente il nucleo.

(c) Determinare se la matrice BA (prodotto righe per colonne) sia invertibile; in caso positivo se ne calcoli esplicitamente la matrice inversa, in caso negativo se ne calcoli esplicitamente il nucleo.

[2] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{C}^3$ si considerino i tre vettori

$$u(t) := (-1, t+4, t-6) \quad , \quad v(t) := (2, -2t-4, 6) \quad , \quad w(t) := (3-t, t^2-8, 15-6t)$$

dipendenti dal parametro $t \in \mathbb{C}$, sia $V'_t := \text{Span}(u(t), v(t), w(t))$ — per ogni $t \in \mathbb{C}$ — il sottospazio di V generato dai tre vettori $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$, e sia $f_t : V \longrightarrow V$ l'unica funzione lineare da V a V tale che

$$f_t(1, 0, 0) := u(t) \quad , \quad f_t(0, 1, 0) := v(t) \quad , \quad f_t(0, 0, 1) := w(t)$$

(a) Per ogni $t \in \mathbb{C}$, calcolare la dimensione del sottospazio V'_t .

(b) Per ogni $t \in \mathbb{C}$, determinare una base del sottospazio V'_t .

(c) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{C}$ la funzione f_t sia invertibile.

[3] — Nello spazio affine $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^4$ di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, si consideri il sottospazio affine $\mathcal{S}$ con equazioni cartesiane

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

- (a) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{S}$.
- (b) Determinare equazioni parametriche per $\mathcal{S}$.
- (c) Determinare equazioni parametriche per l'unico sottospazio affine $\mathcal{S}'$ di $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^4$ che sia parallelo a $\mathcal{S}$, abbia la stessa dimensione e passi per il punto $P'_0 := (3, -1, 2, 1)$.

[4] — Sia data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$$

dove $\mathbb{K}$ è un campo.

- (a) Calcolare lo spettro di A quando $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$.
 - (b) Calcolare lo spettro di A quando $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_5$.
 - (c) Per $\mathbb{K} := \mathbb{Q}$, determinare se la matrice A sia diagonalizzabile; in caso negativo si spieghi il perché, in caso positivo si calcoli esplicitamente una base di autovettori.
 - (d) Per $\mathbb{K} := \mathbb{Z}_5$, determinare se la matrice A sia diagonalizzabile; in caso negativo si spieghi il perché, in caso positivo si calcoli esplicitamente una base di autovettori.
-
-