CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024–2025

Esame scritto dell'11 Febbraio 2026 — Sessione Invernale, 6° appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

········· * ·········

[1] — Si consideri il sistema lineare di tre equazioni in tre incognite, dipendente da un parametro $\ell \in \mathbb{R}$, dato da

$$\mathcal{S}_\ell \, : \, \begin{cases} \ell\, x + z \;=\; 3\,\ell + 2 \\ 8\,x - y + \ell^2\, z \;=\; -2 \\ 2\,\ell\, y \;=\; -\ell \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di $\ell \in \mathbb{R}$ il sistema $\mathcal{S}_\ell$ abbia esattamente una e una sola soluzione.

(b) Determinare per quali valori di $\ell \in \mathbb{R}$ il sistema $\mathcal{S}_\ell$ non abbia nessuna soluzione.

(c) Determinare per quali valori di $\ell \in \mathbb{R}$ il sistema $\mathcal{S}_\ell$ abbia più di una soluzione.

(d) Per tutti i valori di $\ell \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $\mathcal{S}_\ell$ abbia più di una soluzione, determinare esplicitamente tutte le sue soluzioni.

[2] — Si considerino i vettori $v_1 := (0\,,-1\,,-2)$, $v_2 := (2\,,0\,,1)$ e $v_3 := (-1\,,3\,,2)$ nello spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^3$. Si considerino poi le tre matrici $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dove x_1, x_2 e x_3 rappresentano delle incognite.

(a) Dimostrare che i tre vettori v_1, v_2 e v_3 sono tra loro linearmente indipendenti.

(b) Dimostrare che la matrice A è invertibile.

(c) Calcolare la matrice A^{-1} inversa di A.

(d) Risolvere il sistema lineare $\circledast : A\,\underline{x} \,=\, \underline{b}$.

[3] — Per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione data da

$$(x_1\,, x_2\,, x_3) \mapsto f(x_1\,, x_2\,, x_3) := \big(\,2\,x_1\,, x_1 + 2\,x_2 + x_3\,, -x_1 + k\,x_3\,\big)$$

per ogni $(x_1\,, x_2\,, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Considerando $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale (rispetto alle operazioni standard di somma e prodotto per uno scalare), dimostrare che la funzione f_k è lineare.

(b) Determinare l'unica matrice $A_k \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ tale che $L_{A_k} = f_k$, cioè tale che $A_k \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, dove $(y_1\,, y_2\,, y_3) := f(x_1\,, x_2\,, x_3)$, per ogni $(x_1\,, x_2\,, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Determinare tutti gli autovalori di A_k.

(d) Determinare — giustificando opportunamente la conclusione — se la matrice A_k sia diagonalizzabile oppure no.

[4] — Nello spazio affine razionale tridimensionale $\mathcal{A}^3_{\mathbb{Q}}$ si considerino il punto $P_0 := (-2\,, 1\,, 3)$, la retta r e il piano π descritti dalle equazioni $r : \begin{cases} 2\,x - y + 3\,z - 1 \,=\, 0 \\ x + 5\,y + z - 17 \,=\, 0 \end{cases}$ (cartesiane) e $\pi : \begin{cases} x \,=\, 2\,\ell - t + 5 \\ y \,=\, -\ell + 5\,t + 1 \\ z \,=\, 3\,\ell + t - 2 \end{cases}$ $\big[\forall\ \ell\,, t \in \mathbb{Q}\big]$ (parametriche)

(a) Descrivere esplicitamente l'insieme $r \cap \pi$ intersezione della retta r e del piano π.

(b) Determinare equazioni cartesiane dell'unico piano π' parallelo al piano π e passante per il punto P_0.