CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024–2025

Esame scritto del 28 Gennaio 2026 — V appello, Sessione Invernale

N.B.: compilare il compito in modo *<u>sintetico</u>* *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

.... * ....

[1] — Si considerino le rette r ed s in $\mathbb{R}^3$ aventi equazioni cartesiane ed equazioni parametriche rispettivamente

$$r : \begin{cases} x + 3\,y - z + 4 \,=\, 0 \\ x - 2\,y - z \,=\, 0 \end{cases} \qquad , \qquad s : \begin{cases} x \,=\, 3\,t - 3 \\ y \,=\, 0 \\ z \,=\, t - 1 \end{cases} \qquad (\,\forall\ t \in \mathbb{R}\,)$$

(a) Dimostrare che r ed s sono sghembe.

(b) Determinare equazioni cartesiane per l'unica retta r' parallela alla retta r e passante per il punto $P_0 := (2\,,-3\,,1)$.

[2] — Al variare del parametro $k \in \mathbb{Q}$, si considerino le matrici $A\,,B_k \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ date da

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad B_k := \begin{pmatrix} k & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Dimostrare che la matrice A è invertibile, e calcolare esplicitamente la sua matrice inversa A^{-1}.

(b) Determinare il valore dei tre determinanti

$$det\big(A^{-1} \cdot B_k \cdot A^2\big) \quad , \qquad det\big(2\,B_k\big) \quad , \qquad det\big(A + B_k\big)$$

(continua...) $\Longrightarrow$

[3] — Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, si considerino i cinque vettori in $\mathbb{R}^3$ dati da

$$w_1(t) := \begin{pmatrix} t-6 \\ 2\,t+1 \\ 5\,t+9 \end{pmatrix} \,, \qquad w_2(t) := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \,, \qquad w_3(t) := \begin{pmatrix} -t-2 \\ 5 \\ t+17 \end{pmatrix}$$

$$w_4(t) := \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix} \,, \qquad w_5(t) := \begin{pmatrix} t+2 \\ -5 \\ -t-17 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio vettoriale $W(t) := \mathit{Span}\big(w_1(t)\,, w_2(t)\,, w_3(t)\,, w_4(t)\,, w_5(t)\big)$ da essi generato in $\mathbb{R}^3$.

(a) Determinare — al variare dei valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ — quali tra i due vettori $u := \begin{pmatrix} 9 \\ 23 \\ 60 \end{pmatrix}$ e $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartengano al sotospazio $W(t)$.

(b) Determinare la dimensione del sottospazio $W(t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(c) Determinare un sottoinsieme $\mathcal{B}(t)$ di $\big\{w_1(t)\,, w_2(t)\,, w_3(t)\,, w_4(t)\,, w_5(t)\big\}$ che sia una base di $W(t)$.

[4] — Si considerino la matrice quadrata $A := \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 11 & -2 \end{pmatrix} \in \mathit{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ed i vettori $v_t := \begin{pmatrix} 7-2\,t \\ 4-t \\ 11-3\,t \end{pmatrix}$ — al variare di $t \in \mathbb{R}$ — e $w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Dimostrare che w è autovettore della matrice A.

(b) Determinare tutti gli autovalori della matrice A.

(c) Determinare gli unici due valori t_1 e t_2 del parametro $t \in \mathbb{R}$ per i quali v_t sia autovettore di A.

(d) Dimostrare che l'insieme $\mathcal{B} := \big\{v_{t_1}\,, v_{t_2}\,, w\big\}$ è una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.