

CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024-2025

Esame scritto del 26 Settembre 2025 — IV appello, Sessione Autunnale

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Nello spazio affine tridimensionale reale $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, siano r ed s le due rette descritte rispettivamente dalle equazioni cartesiane ed equazioni parametriche seguenti

$$r : \begin{cases} 3y - 2z + 4 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

(a) Dimostrare che r ed s sono sghembe.

(b) Determinare equazioni cartesiane per l'unica retta ℓ che passa per il punto $P_0 := (2, -1, -5)$ ed è parallela alla retta r .

[2] — Per ogni $\ell \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice $A_\ell \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{pmatrix} \ell - 4 & 0 & 1 \\ 4 - \ell & \ell - 3 & 2 \\ 4\ell - 16 & 3 - \ell & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il rango di A_ℓ , per ogni valore di $\ell \in \mathbb{R}$.

(b) Per i due valori specifici $\ell = 3$ e $\ell = 2$, determinare se la corrispondente matrice A_ℓ sia invertibile oppure no. In caso negativo, si spieghi perché la matrice non sia invertibile; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente la matrice inversa A_ℓ^{-1} .

(continua...) $\implies$

[3] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^4$ (su $\mathbb{Q}$) si considerino i quattro vettori

$$w_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_4 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio vettoriale $W := \text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ da essi generato.

- (a) Determinare la dimensione del sottospazio W .
- (b) Determinare un sottoinsieme B_W di $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ che sia una base di W .
- (c) Determinare quali tra i vettori $u' := (0, 5, -1, -4)$ e $v'' := (1, -1, -2, 1)$ appartengano al sottospazio W .
- (d) Determinare una base B dello spazio totale V che contenga la base B_W determinata al punto (b).

[4] — Si consideri la matrice quadrata $M := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$.

- (a) Determinare tutti gli autovalori della matrice M .
- (b) Determinare equazioni cartesiane (esplicite) per ciascun autospazio di M .
- (c) Determinare una base esplicita per ciascun autospazio di M .
- (d) Determinare se la matrice M sia diagonalizzabile oppure no; inoltre,
 - (d.-) nel caso in cui non sia diagonalizzabile, se ne spieghi esplicitamente la ragione;
 - (d.+) nel caso in cui sia diagonalizzabile, si calcoli esplicitamente una base di autovettori di M per lo spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^4$.

GEOMETRIA ED ALGEBRA

SCRITTO DEL 26/09/2025

(Fabio GAVARINI)

[1] Nello spazio $A^3_{\mathbb{R}}$ siano r ed s le rette date da

$$r: \begin{cases} 3y - 2z + 4 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

- (a) Dimostrare che r ed s sono sghembe
- (b) Determinare equazioni parametriche per l'unica retta l passante per $P_0 = (2, -1, -5)$ e parallela ad r .

Soluzione:

(a) Osserviamo che

$$\begin{aligned} r \text{ ed } s \text{ sono sghembe} &\iff r \cap s = \emptyset \\ &\quad (\text{cioè sono } \underline{\text{non}} \text{ incidenti}) \\ &\quad \text{e } r \not\parallel s \\ &\quad (\text{cioè sono } \underline{\text{non}} \text{ parallele}) \end{aligned}$$

Per calcolare $r \cap s$, sostituisco
 nelle equazioni (cartesiane) di r
 le espressioni per x, y e z date dalle
 equazioni (parametriche) di s ; si trova

$$r \cap s = \begin{cases} 3 \cdot (t+3) - 2 \cdot 0 + 4 = 0 \\ t + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3t + 13 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{⚡} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nexists P \in r \cap s, \text{ cioè } r \cap s = \emptyset,$$

cioè r ed s sono non incidenti

(= "non hanno punti in comune").

Per capire se $r \parallel s$ (= "sono parallele")
 oppure no, trovo equazioni parametriche
 per r , dalle quali "leggo" un
 vettore direttore per r . "Risolvendo"
 il sistema di equazioni cartesiane
 di r si trova

$$\begin{cases} 3y - 2z + 4 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{II} \rightarrow \text{II} + 3\text{I}} \begin{cases} y + z = 0 \\ 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{II} \rightarrow \text{II} - 3\text{I} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ -5z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -z = -4/5 \\ z = 4/5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = k \\ y = -4/5 \\ z = +4/5 \end{cases} (\forall k \in \mathbb{R})$$

equazioni parametriche per r

⇓

cioè $r: \begin{cases} x = 1 \cdot k + 0 \\ y = 0 \cdot k + (-4/5) \\ z = 0 \cdot k + 4/5 \end{cases} (\forall k \in \mathbb{R})$

$\vec{v}_2 = (1, 0, 0)$ è vettore direttore della retta r

ORA, la retta s invece ha vettore

direttore $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$

e allora $\nexists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \vec{v}_2 = \vec{v}_1$

cioè $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1$ non sono proporzionali,
 QUINDI anche $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1$ non sono paralleli

ALLORA si ottiene che

r ed s non sono parallele

Pertanto, grazie all'osservazione iniziale, concludiamo che

r ed s sono sghembe, q.e.d.

(b) Datto $\vec{s}_r = (\lambda, \mu, \nu)$ un vettore direttore di r e dato $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$ un punto in $A_{\mathbb{R}}^3$, la retta l che passa per P_0 ed è parallela alla retta r ha equazioni parametriche

$$l: \begin{cases} x = \lambda \cdot t + x_0 \\ y = \mu \cdot t + y_0 \\ z = \nu \cdot t + z_0 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

Nel nostro caso è $\vec{s}_r = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- calcolato al punto (a) - e anche

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{- per definizione -}$$

QUINDI è

$$l: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -1 \\ z = -5 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

equazioni parametriche di l

Adesso ricaviamo equazioni cartesiane per l

$$l: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -1 \\ z = -5 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \textcircled{*} \begin{cases} t = x - 2 \\ 0 = y + 1 \\ 0 = z + 5 \end{cases}$$

sistema
lineare
in t

$$(A | \underline{b}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & x-2 \\ 0 & y+1 \\ 0 & z+5 \end{array} \right) \quad \text{matrice completa di } \textcircled{*}$$

$\textcircled{*}$ è compatibile (= "ha soluzioni")
se e soltanto se

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A | \underline{b}) \quad \text{con}$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

&

$$\text{rg}(A | \underline{b}) = \text{rg} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & x-2 \\ 0 & y+1 \\ 0 & z+5 \end{array} \right)}_{(A | \underline{b})}$$

QUINDI

$$\textcircled{*} \text{ è compatibile } \Leftrightarrow \begin{cases} y+1=0 \\ z+5=0 \end{cases}$$

PERCIÒ

l ha equazioni
cartesiane

$$l: \begin{cases} y+1=0 \\ z+5=0 \end{cases}$$

2 Per ogni $l \in \mathbb{R}$, si consideri

$$A := \begin{pmatrix} l-4 & 0 & 1 \\ 4-l & l-3 & 2 \\ 4l-16 & 3-l & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

(a) Determinare il rango di A_l , $\forall l \in \mathbb{Q}$.

(b) Per i valori $l=3$ e $l=2$, determinare se la matrice A_l sia invertibile o no.

In caso negativo si spieghi il perché,
in caso affermativo si calcoli esplicitamente la matrice inversa A_l^{-1} .

Soluzione:

(a) Riduciamo A_l in forma triangolare superiore mediante Eliminazione di Gauss (= E.G.) per righe, dall'alto in basso:

$$A_l := \begin{pmatrix} l-4 & 0 & 1 \\ 4-l & l-3 & 2 \\ 4l-16 & 3-l & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \mapsto \text{III} - 4\text{I}]{\text{II} \mapsto \text{II} + \text{I}} \begin{pmatrix} l-4 & 0 & 1 \\ 0 & l-3 & 3 \\ 0 & 3-l & -2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} + \text{II}} \begin{pmatrix} l-4 & 0 & 1 \\ 0 & l-3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: T_l$$

La matrice T_l così ottenuta è triangolare superiore, con pivot ($:=$ elementi sulla diagonale) dipendenti da l , precisamente $p_1(l) = l-4$, $p_2(l) = l-3$, $p_3(l) = 1$.

ALLORA

(1) $\forall l \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$ si ha

$$p_1(l) \neq 0, \quad p_2(l) \neq 0, \quad p_3(l) \neq 0$$

dunque i tre pivot sono tutti diversi da 0, e allora il rango è

$$\text{rg}(A_l) = \text{rg}(T_l) = 3 \quad \forall l \in \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$$

(2) per $l = 4$ si ha

$$p_1(l) = 0, \quad p_2(l) = 1, \quad p_3(l) = 1$$

e quindi $T_{l=4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ riduciamo T_4 in forma a scala (superiore), tramite E.G. sulle righe, come segue:

$$T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{l=4}$$

matrice a scala (superiore)

così otteniamo la matrice a scala S_4 , che ha 2 pivot (con "pivot" nel senso delle matrici a scala: sono i coefficienti non nulli all'inizio di ciascun "gradino" della scala - e quindi sono esattamente tanti quanti gli scalini stessi) e
 $\Rightarrow$ ALLORA otteniamo che

$$\operatorname{rg}(A_4) = \operatorname{rg}(T_4) = \operatorname{rg}(S_4) = \\ = \#(\text{pivot di } S_4) = 2$$

CIOE'

$$\operatorname{rg}(A_4) = 2$$

(3) per $l=3$ si ha

$$p_1(l) = -1, \quad p_2(l) = 0, \quad p_3(l) = 1$$

e quindi

$$T_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui la riduzione a scala (superiore) ci dà

$$T_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{III} - 3\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III} \leftrightarrow \text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_3 \leftarrow \begin{array}{l} \text{matrice a} \\ \text{scala} \\ \text{(superiore)} \end{array} \begin{array}{l} \text{con} \\ 2 \\ \text{pivot} \end{array}$$

PERCIO'

$$\operatorname{rg}(A_3) = \operatorname{rg}(T_3) = \operatorname{rg}(S_3) = \#(\text{pivot di } S_3) = 2$$

QUINDI

$$\operatorname{rg}(A_3) = 2$$

(b) CASO $l=3$: Dal punto (a) sappiamo che per $l=3$ si ha

$$\text{rg}(A_3) = 2 \neq 3$$

QUINDI A_3 ha rango minore del massimo possibile (che è la sua "taglia", cioè 3, visto che A_3 è una matrice 3×3), e allora sappiamo che

A_3 non è invertibile.

CASO $l=2$: Dal punto (a) sappiamo

che per $l=2$ si ha

$$\text{rg}(A_2) = 3$$

QUINDI A_2 ha rango massimo, e perciò

A_2 è invertibile.

Procediamo al calcolo di A_2^{-1} , secondo un algoritmo standard. Proviamo

$$(A_2 | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{II} \mapsto \text{II} + \text{I}} \\ \xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} - 4\text{I}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{II} \mapsto \text{II} + \text{I}} \\ \xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} - 4\text{I}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} + \text{II}}$$

$$\xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} + \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{I} \mapsto \text{I} - \text{III}} \\ \xrightarrow{\text{II} \mapsto \text{II} - 3\text{III}} \end{array}$$

N.B.: da qui
si vede già
(di nuovo) che
 $\text{rg}(A_2) = 3$
e quindi che
 A_2 è invertibile

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{I} \mapsto \text{I} - \text{III}} \\ \xrightarrow{\text{II} \mapsto \text{II} - 3\text{III}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 10 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \mapsto$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{I} \mapsto (-2)^{-1} \cdot \text{I}} \\ \xrightarrow{\text{II} \mapsto (-1)^{-1} \cdot \text{II}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2^{-1} & 2^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{I_3} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A_2^{-1}}$

QUINDI è

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2^{-1} & 2^{-1} \\ -10 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 In $V := \mathbb{Q}^4$ si considerino i vettori

$$w_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_4 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio vettoriale $W := \text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4)$.

- (a) Determinare la dimensione di W .
- (b) Determinare un sottoinsieme B_W di $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ che sia una base di W .
- (c) Determinare quali tra i vettori $u' := (0, 5, -1, -4)$ e $v'' := (1, -1, -2, 1)$ appartengano al sottospazio W .
- (d) Determinare una base B dello spazio totale V che contenga la base B_W determinata al punto (b).

Soluzione:

Possiamo trattare tutti i quesiti simultaneamente con un unico algoritmo, che punta (!) a ridurre

a scala (superiore) alcune sottomatrici di una opportuna matrice. A tal fine, consideriamo la matrice che ha per colonne (nell'ordine) i vettori

$$w_1, w_2, w_3, w_4, u', v'', e_1, e_2, e_3, e_4$$

(con $e_j := j^{\circ}$ vettore della base canonica di $\mathbb{Q}^4 := V$, cioè

$$e_j := (\delta_{ij})_{i=1, \dots, 4}; \quad \forall j = 1, \dots, 4)$$

CIOÈ

$$M := (w_1 | w_2 | w_3 | w_4 | u' | v'' | e_1 | e_2 | e_3 | e_4) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cc|cccc} -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ora operiamo E.G.↓ su M puntando a ridurre a scala la sua sottomatrice $M^{1,2,3,4}$ formata dalle prime 4 colonne, cioè

$$M^{1,2,3,4} := (w_1 | w_2 | w_3 | w_4). \quad \text{I calcoli danno}$$

$$M := \left(\begin{array}{cccc|cc|cccc} -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV} \mapsto \text{IV} + \text{I}]{\text{III} \mapsto \text{III} + 3\text{I}}$$

$$\xrightarrow[\text{IV} \mapsto \text{IV} + \text{I}]{\text{III} \mapsto \text{III} + 3\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|cc|cccc} -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -6 & -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cc|cccc} -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -6 & -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{IV} \mapsto \text{IV} + 4 \cdot \text{II}]{\text{III} \mapsto \text{III} + 5 \cdot \text{II}}$$

$$\xrightarrow[\text{IV} \mapsto \text{IV} + 4 \cdot \text{II}]{\text{III} \mapsto \text{III} + 5 \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|cc|cccc} -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & -21 & 11 & 8 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -11 & 7 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{IV} \mapsto \text{IV} - \frac{11}{21} \cdot \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|cc|cccc} -1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -21 & -21 & 11 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{26}{21} & -\frac{4}{21} & 1 & -\frac{11}{21} & \frac{29}{21} \end{array} \right)$$

ORA analizziamo questa matrice S .

!!
 S

(1) La sottomatrice formata dalle prime 4 colonne

$$S^{1-4} := (S^1 | S^2 | S^3 | S^4)$$

è la riduzione a scala della sottomatrice M^{1-4} di M composta dalle prime 4 colonne di M , cioè da w_1, w_2, w_3 e w_4 .

ALLORA:

(1.a) la matrice a scala S^{1-4}

ha 3 pivot, perciò è

$$\dim_{\mathbb{Q}}(W) = \dim_{\mathbb{Q}}(\text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4)) =$$

$$= \text{rg}(M^{1-4}) = \text{rg}(S^{1-4}) =$$

$$= \#(\text{pivot di } S^{1-4}) = 3$$

quindi è $\dim_{\mathbb{Q}}(W) = 3$

$\Rightarrow$ (a) OK

(1.b) i 3 pivot della matrice S^{1-4}

stanno nelle colonne 1, 2 e 4; $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ le colonne M^1, M^2 e M^4 di M

formano una base del sottospazio U

di $V := \mathbb{Q}^4$ generato dalle colonne

di M : nel nostro caso è, per

definizione, $M^j = w_j$ ($\forall j=1, \dots, 4$)

e così anche $U = W$,

QUINDI

$B_W := \{w_1, w_2, w_4\}$ è una
base di W contenuta in
 $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, come richiesto $\Rightarrow$ (b)

(2) La sottomatrice di S

$$S^{1-4,5} := (S^1 | S^2 | S^3 | S^4 | S^5)$$

formata dalle colonne 1, ..., 4, 5 è la
riduzione a scala della sottomatrice

$M^{1-4,5}$ di M formata dalle colonne 1, ..., 4, 5.

Abbiamo $\dim_{\mathbb{Q}}(\text{Span}(M^1, M^2, M^3, M^4, M^5)) =$

$$\text{rg}(M^{1-4,5}) = \text{rg}(S^{1-4,5}) =$$

$$= \#(\text{pivot di } S^{1-4,5}) = 3 =$$

$$= \text{rg}(S^{1-4}) = \text{rg}(M^{1-4}) = \dim_{\mathbb{Q}}(W)$$

quindi $\dim(\text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4, u')) =$

$$= \dim(\text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4))$$

da cui segue $u' \in \text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4) =: W$

ANALOGAMENTE, la sottomatrice di S

$$S^{1-4,6} := (S^1 | S^2 | S^3 | S^4 | S^6)$$

formata dalle colonne 1, 2, 3, 4, 6 e' la riduzione a scala dell'analogha sottomatrice $M^{1-4,6}$ di M . Tale $S^{1-4,6}$ ha 4 pivot, così abbiamo

$$\begin{aligned} \dim(\text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4, v'')) &= \\ &= \dim(\text{Span}(M^1, M^2, M^3, M^4, M^6)) = \\ &= \text{rg}(M^{1-4,6}) = \text{rg}(S^{1-4,6}) = 4 \end{aligned}$$

mentre

$$\dim(W) = \dim(\text{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4)) = 3$$

perciò e' $v'' \notin W$

$\Rightarrow (c)$ Ok

(3) La sottomatrice di S (di forma 4×8)

$$S^{1-4,7-10} := (S^1 | \dots | S^4 | S^7 | \dots | S^{10})$$

e' la riduzione a scala dell'analogha sottomatrice di M

$$M^{1-4,7-10} := (M^1 | \dots | M^4 | M^7 | \dots | M^{10})$$

ORA, $S^{1-4, 7-10}$ ha 4 pivot, che stanno nelle colonne 1, 2, 4 e 5 (N.B.: in $S^{1-4, 7-10}$, S^7 è la 5^a colonna, non la 7^a...!).

Ne segue che

$$\begin{aligned} \dim(\text{Span}(w_1, \dots, w_4, e_1, \dots, e_4)) &= \\ = \text{rg}(M^{1-4, 7-10}) &= \text{rg}(S^{1-4, 7-10}) = \\ &= \#(\text{pivot di } S^{1-4, 7-10}) = 4 \end{aligned}$$

quindi $\text{Span}(w_1, \dots, w_4, e_1, \dots, e_4) = \mathbb{Q}^4 =: V$
(cosa già nota a priori, perché $\{e_1, \dots, e_4\}$ è una base di $\mathbb{Q}^4 =: V$)

e tra i vettori $w_1, \dots, w_4, e_1, \dots, e_4$ formano una base il 1°, 2°, 4° e 5°, cioè

$$B := \{w_1, w_2, w_4, e_1\}$$

è base di $V := \mathbb{Q}^4$, che (per costruzione) contiene la base $B_w = \{w_1, w_2, w_4\}$ già ottenuta al punto (b). $\rightarrow$ (d)

4 Si consideri la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$$

- (a) Determinare tutti gli autovalori di M .
- (b) Determinare equazioni caratteristiche per ciascun autospazio di M .
- (c) Determinare una base esplicita per ciascun autospazio di M .
- (d) Determinare se M è diagonalizzabile oppure no; inoltre:
 - (d.-) se non è diagonalizzabile, si spieghi perché;
 - (d.+) se è diagonalizzabile, si calcoli una base esplicita di autovettori di M per lo spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^4$.

Soluzione:

- (a) Calcoliamo gli autovalori come radici del polinomio caratteristico di M , che è

$$P_M(x) := \det(M - x \cdot I_4) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 6-x & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -4-x & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -x \end{pmatrix} =$$

sviluppo di Laplace lungo la 2^a riga

$$= (2-x) \cdot \det \begin{pmatrix} 6-x & 7 & -5 \\ -3 & -4-x & 3 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix} =$$

calcolo con formula di SARRUS

$$= (2-x) \cdot ((6-x) \cdot (-4-x) \cdot (-x) + 7 \cdot 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 \cdot (-5) - (-5)(-4-x) - 1 - 7 \cdot (-3)(-x) - 3 \cdot 1 \cdot (6-x)) =$$

$$= (2-x) \cdot (-x^3 + 2x^2 + 24x + 21 + 15 - 5x - 20 - 21 \cdot x + 3x - 18) =$$

$$= (2-x) \cdot (-x^3 + 2x^2 + x - 2) = (x-2) \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2)$$

$x=2$
è radice

la verifica diretta dà che

± 1 e ± 2 sono possibili radici

$x = -1, x = +1, x = +2$ sono radici

QUINDI è

$$P_M(x) = (x-2) \cdot (x+1)(x-1) \cdot (x-2) = (x-2)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)$$

$$\boxed{\alpha = -1:}$$

$$V_{-1} : (M + I_4) \underline{x} = \underline{0}$$

case

$$V_{-1} : \begin{cases} 7 \cdot x_1 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ -3x_1 - 3x_3 + 3 \cdot x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha = +1:}$$

$$V_{+1} : (M - I_4) \underline{x} = \underline{0}$$

case

$$V_{+1} : \begin{cases} 5x_1 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -3x_1 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\alpha = +2:}$$

$$V_{+2} : (M - 2 \cdot I_4) \underline{x} = \underline{0}$$

case

$$V_{+2} : \begin{cases} 4 \cdot x_1 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ -3x_1 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2 \cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

(c) Considerando un autospazio V_α , per trovarne una base bisogna descriverlo esplicitamente, risolvendo il sistema lineare omogeneo espresso dalle sue equazioni caratteriane - in altre parole, bisogna trovare equazioni parametriche dell'autospazio stesso.

Vediamo i vari casi:

$$\boxed{\alpha = -1}: V_{-1}: (M + I_4) \cdot \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M + I_4 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{row ops}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \\ 7 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{III} \mapsto \text{III} + 3\text{I} \\ \text{IV} \mapsto \text{IV} - 7\text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} \mapsto \text{IV} + 2\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{-1}$$

N.B.: la matrice S_{-1} è a scala, con 3 pivot, quindi $m_{-1}^G := \dim(V_{-1}) = 4 - \text{rg}(S_{-1}) = 1$

cioè $\alpha = -1$ ha molteplicità geometrica 1.

(continuiamo la risoluzione del sistema)

∃! colonna in S_{-1} senza pivot, che è la 3^a anzi usiamo x_3 come parametro quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ 6x_4 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{Q}) \Rightarrow$$

← NUOVA "EQUAZIONE" che aggiungiamo!

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \end{array} \right) \xrightarrow{\text{swap}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right) \mapsto$$

$$\xrightarrow{\text{IV} \mapsto 6^{-1} \cdot \text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} \mapsto \text{I} - \text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \mapsto$$

$$\xrightarrow{\text{I} \mapsto \text{I} - \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} \mapsto 3^{-1} \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

QUINDI troviamo

$$V_{-1} = \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{Q})$$

che sono appunto equazioni parametriche di V_{-1} . fissando $t := 1$ troviamo

$$v_{-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_{-1} \setminus \{0\}$$

e $B_{-1} := \{v_{-1}\}$ è una base di V_{-1} .

$\alpha = +1$: analogamente (più rapido) si ha

$$V_{+1} : (M - I_4) \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M - I_4 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{III} \leftrightarrow \text{III} + 3 \cdot \text{I} \\ \text{IV} \leftrightarrow \text{IV} - 5 \cdot \text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{III} \leftrightarrow \text{III} + 3 \cdot \text{I} \\ \text{IV} \leftrightarrow \text{IV} - 5 \cdot \text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} \leftrightarrow \text{IV} + \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{+1}$$

ORA, S_{+1} è a scala, con 3 pivot, quindi

$$m_{+1}^G := \dim(V_{+1}) = 4 - \text{rg}(S_{+1}) = 1$$

cioè $\alpha = +1$ ha molteplicità geometrica 1

POI $\exists!$ colonne in S_{+1} senza pivot, che

è la 4^a una usiamo x_4 come parametro
quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -2x_3 = 0 \\ x_4 = k \end{cases} \quad (\forall k \in \mathbb{Q}) \quad \Rightarrow$$

← NUOVA "EQUAZIONE"!

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} \mapsto (-2)^{-1}\text{III}]{\text{I} \mapsto \text{I} + \text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k \end{array} \right) \mapsto$$

$$\xrightarrow{\text{I} \mapsto \text{I} + \text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k \end{array} \right) \Rightarrow V_{+1} : \begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = k \end{cases} \quad (\forall k \in \mathbb{Q})$$

equazioni parametriche di V_{+1}

Scegliendo il valore $k=1$ del parametro troviamo

$$v_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_{+1} \setminus \{0\}$$

e $B_{+1} = \{v_{+1}\}$ è una base di V_{+1} .

CONTINUA

$$\boxed{\alpha = +2}:$$

$$V_{+2} : (M - 2I_4) \cdot \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M - 2I_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{row ops}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \mapsto \text{II} - 4\text{I} \\ \text{III} \mapsto \text{III} + 3\text{I} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} + \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{+2}$$

N.B.: la matrice S_{+2} è a scala, con 2 pivot, così

$$m_{+2}^G := \dim(V_{+2}) = 4 - \text{rg}(S_{+2}) = 2$$

cioè $\alpha = +2$ ha molteplicità geometrica 2.

Esattamente 2 colonne in S_{+2} senza pivot, che sono la 2^a e la 4^a anzi uniamo le variabili x_2 e x_4 come parametri quindi il sistema diventa

$$\star \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 = h \\ 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_4 = l \end{cases} \quad (\forall h, l \in \mathbb{Q})$$

NUOVE
"EQUAZIONI"
(una per ciascun parametro libero)

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l \end{array} \right)$$

MATRICE COMPLETA
del sistema $\oplus$

$$\begin{array}{l} I \mapsto I + 2IV \\ III \mapsto III - 3IV \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} I \mapsto I + 2IV \\ III \mapsto III - 3IV \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2l \\ 0 & 1 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l \end{array} \right) \xrightarrow{III \mapsto 3^{-1}III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2l \\ 0 & 1 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l \end{array} \right) \mapsto$$

$$\xrightarrow{I \mapsto I - III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & 1 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l \end{array} \right) \Rightarrow V_{+2} : \begin{cases} x_1 = 3l \\ x_2 = h \\ x_3 = -l \\ x_4 = l \end{cases} (\forall h, l \in \mathbb{Q})$$

equazioni
parametriche
di V_{+2}

Scegliendo le coppie di
valori

$$(h', l') = (1, 0) \quad \text{e} \quad (h'', l'') = (0, 1)$$

si trovano i vettori

$$v'_{+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v''_{+2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_{+2} \setminus \{0\}$$

e $B_{+2} = \{v'_{+2}, v''_{+2}\}$ è base di V_{+2} .

CONCLUDENDO, otteniamo che:

① La matrice M è diagonalizzabile, perché la somma delle molteplicità geometriche dei suoi tre autovalori

$$m_{-1}^G + m_{+1}^G + m_{+2}^G = 1 + 1 + 2 = 4$$

che è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale $V = \mathbb{Q}^4$, o più brevemente è uguale alla "taglia" della matrice stessa (N.B.: una matrice quadrata $n \times n$ ha "taglia" n , per definizione).

② Una base di $V := \mathbb{Q}^4$ composta di autovettori di M (o "base diagonalizzante" di V rispetto a M) si ottiene come unione di basi di tutti gli autospazi; nel nostro caso è

$$B = B_{-1} \cup B_{+1} \cup B_{+2} = \{v_{-1}, v_{+1}, v_{+2}', v_{+2}''\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$