CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024–2025

Esame scritto del 26 Settembre 2025 — IV appello, Sessione Autunnale

N.B.: compilare il compito in modo <u>sintetico</u> ma **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

········· * ·········

[1] — Nello spazio affine tridimensionale reale $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, siano r ed s le due rette descritte rispettivamente dalle equazioni cartesiane ed equazioni parametriche seguenti

$$r : \begin{cases} 3y - 2z + 4 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \big(\forall\, t \in \mathbb{R}\big)$$

(a) Dimostrare che r ed s sono sghembe.

(b) Determinare equazioni cartesiane per l'unica retta ℓ che passa per il punto $P_0 := (2, -1, -5)$ ed è parallela alla retta r.

[2] — Per ogni $\ell \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice $A_\ell \in Mat_{3\times 3}\big(\mathbb{R}\big)$ data da

$$A := \begin{pmatrix} \ell - 4 & 0 & 1 \\ 4 - \ell & \ell - 3 & 2 \\ 4\ell - 16 & 3 - \ell & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il rango di A_ℓ, per ogni valore di $\ell \in \mathbb{R}$.

(b) Per i due valori specifici $\ell = 3$ e $\ell = 2$, determinare se la corrispondente matrice A_ℓ sia invertibile oppure no. In caso negativo, si spieghi perché la matrice non sia invertibile; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente la matrice inversa A_ℓ^{-1}.

(continua...) $\Longrightarrow$

[3] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^4$ (su $\mathbb{Q}$) si considerino i quattro vettori

$$w_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \; , \quad w_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \; , \quad w_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \; , \quad w_4 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio vettoriale $W := Span\big(w_1 , w_2 , w_3 , w_4\big)$ da essi generato.

(a) Determinare la dimensione del sottospazio W .

(b) Determinare un sottoinsieme B_W di $\big\{v_1 , v_2 , v_3 , v_4\big\}$ che sia una base di W .

(c) Determinare quali tra i vettori $u' := (0 , 5 - 1 , -4)$ e $v'' := (1 , -1 , -2 , 1)$ appartengano al sotospazio W .

(d) Determinare una base B dello spazio totale V che contenga la base B_W determinata al punto *(b)*.

[4] — Si consideri la matrice quadrata $M := \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times4}(\mathbb{Q})$.

(a) Determinare tutti gli autovalori della matrice M .

(b) Determinare equazioni cartesiane (esplicite) per ciascun autospazio di M .

(c) Determinare una base esplicita per ciascun autospazio di M .

(d) Determinare se la matrice M sia diagonalizzabile oppure no; inoltre,

(d.-) nel caso in cui non sia diagonalizzabile, se ne spieghi esplicitamente la ragione;

(d.+) nel caso in cui sia diagonalizzabile, si calcoli esplicitamente una base di autovettori di M per lo spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^4$.