CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024–2025

Esame scritto dell'8 Settembre 2025 — III appello, Sessione Autunnale

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

········· ∗ ·········

[1] — Si considerino i vettori

$$v_1 := (-1,0,0,1)\ ,\ \ v_2 := (0,1,1,0)\ , v_3 := (1,1,-1,-1)\ ,\ \ v_4 := (1,-1,1,-1)$$

nello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$, e il sottospazio vettoriale $W := Span\big(v_1\,, v_2\,, v_3\,, v_4\big)$ da essi generato.

(a) Determinare la dimensione del sottospazio W.

(b) Determinare un sottoinsieme B_W di $\big\{v_1\,, v_2\,, v_3\,, v_4\big\}$ che sia una base di W.

(c) Determinare quali tra i vettori $v' := (1,1,1,1)$ e $v'' := (1,1,1,-1)$ appartengano al sotospazio W.

[2] — Si considerino la matrice $A \in Mat_{4\times 4}\big(\mathbb{R}\big)$ e il vettore $\underline{b} \in \mathbb{R}^4$ dati rispettivamente da

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad , \qquad \underline{b} := \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare se la matrice A sia invertibile oppure no; in caso negativo, si spieghi perché non sia invertibile, in caso positivo si calcoli esplicitamente la matrice inversa A^{-1}.

(b) Risolvere il sistema di equazioni lineari $\circledast : A\,\underline{x} = \underline{b}$.

(continua...) $\Longrightarrow$

[3] — Nello spazio affine tridimensionale reale $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, siano r ed s le due rette descritte rispettivamente dalle equazioni cartesiane ed equazioni parametriche seguenti

$$r : \begin{cases} y + z - 2 = 0 \\ x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{cases} x = -2t + 2/3 \\ y = -3t + 2 \\ z = 3t \end{cases} \qquad \big(\forall\, t \in \mathbb{R}\big)$$

(a) Dimostrare che r ed s sono complanari.

(b) Dimostrare che l'intersezione $r \cap s$ è costituita da uno e un solo punto, che denotiamo con P_0.

(c) Determinare equazioni parametriche per la retta q che passa per il punto P_0 di cui sopra e per il punto $P_1 := \big(-10/11\,, -34/11\,, +34/11\big)$.

[4] — Si consideri la matrice $M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{Q})$.

(a) Determinare tutti gli autovalori della matrice M.

(b) Determinare equazioni cartesiane (esplicite) per ciascun autospazio di M.

(c) Determinare se la matrice M sia diagonalizzabile oppure no; inoltre,

(c.-) nel caso in cui non sia diagonalizzabile, se ne spieghi esplicitamente la ragione;

(c.+) nel caso in cui sia diagonalizzabile, si calcoli esplicitamente una base di autovettori di M per lo spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^4$.