

CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024-2025

Esame scritto del 10 Luglio 2025 — II appello, Sessione Estiva

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Dato $t \in \mathbb{R}$ ed i vettori $v_1 := (1, 2, -t, 1)$, $v_2 := (t, 7, 5, -1)$, $v_3 := (-1, 1, 1, -1)$, $v_4 := (4, t, -2, 4)$ in $V := \mathbb{R}^4$, sia $V'_t := \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

- (a) Calcolare una base B'_t di V'_t ;
- (b) completare la base B'_t di V'_t ad una base B_t di $V := \mathbb{R}^4$;
- (c) determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ si abbia (rispettivamente)

$$v_4 \in \text{Span}(v_1, v_3), \quad v_2 \in \text{Span}(v_1, v_3), \quad v_2 \in \text{Span}(v_1, v_3, v_4).$$

[2] — Si considerino la matrice $A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$ e il vettore $\underline{b} \in \mathbb{Q}^4$ dati rispettivamente da

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare il rango di A .
- (b) Risolvere il sistema di equazioni lineari $\otimes : A\underline{x} = \underline{b}$.
- (c) Determinare se la matrice A sia invertibile oppure no; in caso negativo, si spieghi perché non sia invertibile, in caso positivo si calcoli esplicitamente la matrice inversa A^{-1} .
- (d) Detta A^3 la matrice potenza cubica di A , calcolarne il determinante $\det(A^3)$.

(continua...) \implies

[3] — Nello spazio affine tridimensionale reale $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, siano π ed r rispettivamente il piano e la retta — in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ — di equazioni parametriche

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 + 2t - s \\ z = 2 - t + 2s \end{cases} \quad (\forall t, s \in \mathbb{R}), \quad r : \begin{cases} x = -2 + 2q \\ y = 3q \\ z = 5 + q \end{cases} \quad (\forall q \in \mathbb{R})$$

- (a) Determinare se r sia parallelo a π oppure no.
- (b) Determinare equazioni cartesiane esplicite per il sottoinsieme $r \cap \pi$.

[4] — Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$$

- (a) Determinare tutti gli autovalori dell'endomorfismo L_M di \mathbb{Q}^4 associato a M .
 - (b) Per ciascun autovalore di L_M , descrivere esplicitamente il corrispondente auto-spazio.
 - (c) Precisare se L_M sia diagonalizzabile oppure no: in caso negativo, si spieghi perché non sia diagonalizzabile, in caso positivo si determini esplicitamente una base diagonalizzante.
-
-