CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024–2025

Esame scritto del 25 Giugno 2025 — I appello, Sessione Estiva

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.... * ....

[1] — Si consideri la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 9 & 7 & 5 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times5}(\mathbb{R})$$

e si indichino con M^1, M^2, M^3, M^4, M^5 le cinque colonne di M e con M_1, M_2, M_3, M_4 le sue quattro righe.

(a) Calcolare il rango della matrice M.

(b) Determinare una base esplicita dello spazio $Span_R(M^1, M^2, M^3, M^4, M^5)$.

(c) Determinare una base esplicita dello spazio $Span_R(M_1, M_2, M_3, M_4)$.

[2] — Sia data la matrice

$$S := \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times3}(\mathbb{Q})$$

(a) Determinare tutti gli autovalori di S.

(b) Per ciascun autovalore di S, calcolare il corrispondente autospazio.

(c) Determinare tutti gli autovalori e descrivere i corrispondenti autospazi per le due matrici S^2 e S^5.

(d) Dimostrare che la matrice S è invertibile.

(e) Determinare tutti gli autovalori della matrice inversa S^{-1}.

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 5/3 & -2/3 \\ -1/2 & 13/6 & -2/3 \\ -1/2 & 11/6 & -1/3 \end{pmatrix}$$

(continua...) ⟹

[3] — Nello spazio affine $\mathcal{A}^3_{\mathbb{R}}$ di dimensione 3 sul campo $\mathbb{R}$, si considerino le due rette r_1 e r_2 con equazioni cartesiane e equazioni parametriche rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x - z + 14 = 0 \\ 3x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \quad , \qquad r_2 : \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -2t + 4 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

(a) dimostrare che le due rette r_1 e r_2 non sono tra loro parallele;

(b) indicando con π_0 l'unico piano in $\mathcal{A}^3_{\mathbb{R}}$ parallelo alle rette r_1 e r_2 e passante per il punto $P_0 := (5, -1, 2)$, determinare equazioni cartesiane per π_0.

[4] — Per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, si risolva il sistema di equazioni lineari (su $\mathbb{R}$)

$$\circledast_k : \begin{cases} kx + y - z = 2 \\ -kx + y + (2k-1)z = 2k \\ (k-1)y + z = k^2 - k + 1 \end{cases}$$

GEOMETRIA ED ALGEBRA

— esame scritto del 25/06/2025 —

$\boxed{1}$ Sia

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 9 & 7 & 5 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 5}(\mathbb{R})$$

(a) Calcolare il rango di M.

(b) Determinare una base esplicita di $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(M^1, M^2, M^3, M^4, M^5)$

(c) Determinare una base esplicita di $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(M_1, M_2, M_3, M_4)$.

Soluzione:

(a - b) Riducendo a scala la matrice M, si risolvono i punti (a) e (b).

1° pivot 2° pivot

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 9 & 7 & 5 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III \mapsto III + 4\cdot I \\ IV \mapsto IV - 3\cdot I}]{II \mapsto II + 2\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 21 & 15 & 9 \\ 0 & -1 & -7 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[IV \mapsto IV + II]{III \mapsto III - 3 II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a SCALA

$\exists$ 2 pivot $\Rightarrow rg(M) = 2$

$\Rightarrow$ nelle colonne 1 e 2

QUINDI $\{M^1, M^2\}$ è base come richiesto

QUINDI:

— nella riduzione a scala ci sono esattamente 2 pivot $\Rightarrow$ $\boxed{rg(M) = 2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (a) è risolta.

— i 2 pivot nella riduzione a scala di M sono nelle colonne 1 e 2, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ M^1 e M^2 formano una base di $Span_{\mathbb{R}}(M^1, M^2, M^3, M^4, M^5)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (b) è risolta.

(c) le righe M_1, M_2, M_3, M_4 di M sono le colonne della matrice trasposta M^T;

QUINDI (c) si risolve come (b) ma considerando la matrice trasposta M^T al posto di M! ALLORA,

1° pivot   2° pivot

$$M^T := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 7 & -4 \\ 3 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{IV \mapsto IV - 2I \\ V \mapsto V - I}]{\substack{II \mapsto II + I \\ III \mapsto III - 3I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 21 & -7 \\ 0 & 5 & 15 & -5 \\ 0 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{IV \mapsto IV - 5II \\ V \mapsto V - 3II}]{III \mapsto III - 7II}$$

$$\xrightarrow[\substack{IV \mapsto IV - 5\,II \\ V \mapsto V - 3\,II}]{III \mapsto III - 7\,II} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ $\exists$ 2 pivot, nelle colonne 1 e 2

QUINDI $\{M_1, M_2\}$ è una base di $Span_{\mathbb{R}}(M_1, M_2, M_3, M_4)$ $\Rightarrow$ (c) ok

---

$\boxed{2}$ Sia
$$S := \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

(a) Determinare tutti gli autovalori di S.

(b) Per ciascun autovalore di S, calcolare il corrispondente autospazio.

(c) Determinare tutti gli autovalori e gli autospazi di S^2 e S^5.

(d) Dimostrare che S è invertibile.

(e) Determinare tutti gli autovalori di S^{-1}.

Soluzione:

(a) Sappiamo che $Sp(S) := \{$autovalori di $S\}$

è l'insieme delle radici del polinomio caratteristico di S, che è

$$p_S(x) := \det(S - x \cdot I_3)$$

<u>QUINDI</u> risolviamo l'equazione

$$\det(S - x I_3) = 0 \qquad (1)$$

Il calcolo diretto - con la formula di Sarrus - ci dà

$$\det(S - x \cdot I_3) = \det \begin{pmatrix} (3-x) & -4 & 2 \\ 1 & (-2-x) & 2 \\ 1 & -5 & (5-x) \end{pmatrix} =$$

$$= (3-x)(-2-x)(5-x) + (-4)\cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) \cdot 2 -$$

$$- 2 \cdot (-2-x) \cdot 1 - 2 \cdot (-5) \cdot (3-x) - 1 \cdot (-4) \cdot (5-x) =$$

$$= -x^3 + 6x^2 + x - \cancel{30} - 8 - 10 +$$

$$+ 2x + 4 + \cancel{30} - 10 \cdot x + 20 - 4x =$$

$$= -x^3 + 6x^2 - 11 \cdot x + 6 = \underline{(x-2)\cdot(-x+3)\cdot(x-1)}$$

<u>QUINDI</u>

$$\det(S - x I_3) = (x-2)(-x+3)(x-1)$$

che ha radici $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$

PERCIÒ l'insieme degli autovalori di S è $Sp(S) = \{1, 2, 3\}$ $\Rightarrow$ (a) è ok

(b) $\forall$ autovalore $\alpha \in Sp(S)$, il corrispondente autospazio è dato da

$$V_\alpha = \mathrm{Ker}(S - \alpha \cdot I_3) =$$

$$= \{\text{soluzioni di } \circledast_\alpha (S - \alpha I_3) \cdot \underline{x} = \underline{0}\}$$

Per risolvere il sistema omogeneo

$$\circledast_\alpha : (S - \alpha I_3) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

si riduce a scala la matrice $(S - \alpha I_3)$.

$\boxed{\alpha = 1}$ $\quad S - 1 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3-1 & -4 & 2 \\ 1 & -2-1 & 2 \\ 1 & -5 & 5-1 \end{pmatrix} =$

1° pivot

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \mapsto \text{III} - \text{I}]{\text{II} \mapsto \text{II} - 2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

2° pivot

$$\xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} - \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3y - 2z \\ y = z \\ z = k, \quad \forall k \in \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = k \end{cases} \quad (\forall k \in \mathbb{Q})$$

QUINDI $\boxed{V_1 = \{ (k, k, k) \mid k \in \mathbb{Q} \}}$

$\boxed{\alpha = 2}$ $$S - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3-2 & -4 & 2 \\ 1 & -2-2 & 2 \\ 1 & -5 & 5-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightleftarrows \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 4y + 2z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4y - 2z \\ y = z \\ z = t, \quad \forall t \in \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{Q})$$

QUINDI $\boxed{V_2 = \{ (2t, t, t) \mid t \in \mathbb{Q} \}}$

$\boxed{\alpha = 3}$ $\quad S - 3 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 3-3 & -4 & 2 \\ 1 & -2-3 & 2 \\ 1 & -5 & 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \mapsto III - I} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 5y + 2z = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5y - 2z \\ y = l, \ \forall l \in \mathbb{Q} \\ z = 2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = l \\ y = l \\ z = 2l \end{cases} \quad (\forall l \in \mathbb{Q})$$

QUINDI $\quad \boxed{V_3 = \{ (l, l, 2l) \mid l \in \mathbb{Q} \}}$

(c) Se $\alpha \in Sp(S)$ è autovalore di S, allora $\exists\, v \in V_\alpha \setminus \{0_V\}$, cioè

$$\exists\, v \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{\underline{0}\} : \quad S v = \alpha v \qquad (2)$$

ALLORA $\quad (2) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \ S v = \alpha^k v,$

con $v \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{\underline{0}\}$

QUINDI $\quad v$ è autovettore di S^k $(\forall k \in \mathbb{N})$ con autovalore α^k $\quad (3)$

<u>DUNQUE</u>, siccome sappiamo che $Sp(S) = \{1, 2, 3\}$, da (3) otteniamo che $Sp(S^k) \supseteq \{1^k, 2^k, 3^k\} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

in particolare per $k > 0$ i tre autovalori 1^k, 2^k e 3^k di S^k sono distinti; siccome S^k è di forma 3×3, ha al più tre autovalori distinti, e perciò si conclude che

$$Sp(S^k) = \{1^k, 2^k, 3^k\} \quad \forall k > 0$$

In particolare, per $k = 2$ e $k = 5$ si ha

$$\boxed{\begin{aligned} Sp(S^2) &= \{1^2, 2^2, 3^2\} = \{1, 4, 9\} \\ Sp(S^5) &= \{1^5, 2^5, 3^5\} = \{1, 32, 243\} \end{aligned}}$$

INOLTRE, la (3) garantisce anche che, ponendo

$$V_\alpha^{(S)} := \text{autospazio per } S \text{ con autovalore } \alpha$$

$$V_{\alpha^k}^{(S^k)} := \text{autospazio per } S \text{ con autovalore } \alpha^k$$

si ha $\quad V_\alpha^{(S)} \leq V_{\alpha^k}^{(S^k)} \qquad (\forall k \in \mathbb{N})$

perciò – dato che $(\forall k > 0)$ gli autovalori distinti sono 3 e tali autospazi sono in $V := \mathbb{Q}^3$ – si conclude che

$$\dim\left(V_{\alpha^k}^{(S^k)}\right) = \dim\left(V_\alpha^{(S)}\right)$$

$$\forall\, \alpha \in Sp(S) \quad e \quad \forall k > 0$$

e quindi $\quad V_{\alpha^k}^{(S^k)} = V_\alpha^{(S)} \qquad \forall \alpha \in Sp(S) \quad \forall k > 0$

In particolare:

$\boxed{k=2}$ $\quad V_1^{(S^2)} = V_1^{(S)}, \quad V_4^{(S^2)} = V_2^{(S)}$

$$V_9^{(S^2)} = V_3^{(S)}$$

$\boxed{k=5}$ $\quad V_1^{(S^5)} = V_1^{(S)}$

$V_{32}^{(S^5)} = V_2^{(S)}$, $\quad V_{243}^{(S^5)} = V_3^{(S)}$

con $V_1^{(S)}$, $V_2^{(S)}$ e $V_3^{(S)}$ come già descritti al punto (b)

Questo risponde al quesito (c).

(d) Sappiamo che

$$S \text{ è invertibile} \iff \det(S) \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \notin Sp(S) \iff \det(S - 0 \cdot I_3) \neq 0$$

cioè

S è invertibile $\iff$ 0 non è autovalore di S

MA sappiamo già — da (a) — che

$$Sp(S) := \{\text{autovalori di } S\} = \{1, 2, 3\}$$

quindi $0 \notin Sp(S)$ e perciò

S è invertibile, q.e.d.

(e) $Sp(S^{-1})$ si calcola come $Sp(S^k)$ per $k \in \mathbb{N}$ al punto (c).

Dato $\alpha \in Sp(S)$ un autovalore di S, sia $v \in V_\alpha \setminus \{0\}$. Allora

è $$S.v = \alpha v \,, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = S^{-1}(S.v) = S^{-1}(\alpha v) = \alpha S^{-1}.v$$

$$\Rightarrow \quad S^{-1}.v = \alpha^{-1} v$$

CIOÈ

$$S.v = \alpha.v \Rightarrow S^{-1}.v = \alpha^{-1} v$$

e invertendo i ruoli di S e S^{-1} (e α e α^{-1}), oppure invertendo il ragionamento & i calcoli, si ha anche

$$S^{-1}.v = \beta v \Rightarrow S.v = \beta^{-1} v$$

QUINDI $$Sp(S^{-1}) = \{ \alpha^{-1} \mid \alpha \in Sp(S) \}$$

nel nostro caso $$\boxed{Sp(S) = \{1, 2^{-1}, 3^{-1}\}}$$

$\boxed{3}$ Si considerino in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ le rette

$$r_1 : \begin{cases} x - z + 14 = 0 \\ 3x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -2t + 4 \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

(a) Dimostrare che r_1 e r_2 non sono tra loro parallele.

(b) Determinare equazioni cartesiane del piano π_0 parallelo a r_1 e r_2 e passante per $P_0 := (5, -1, 2)$.

Soluzione:

(a) Calcolo un vettore direttore di r_1, cercandone equazioni parametriche.

$$r_1 : \begin{cases} x - z + 14 = 0 \\ 3x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = k \quad (k \in \mathbb{R}) \\ x = k - 14 \\ \cancel{3k} - 42 + 2y - \cancel{3k} + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = k \\ x = k - 14 \quad (k \in \mathbb{R}) \\ y = 19 \end{cases} \leftarrow \text{EQUAZIONI PARAMETRICHE di } r_1$$

$$\Downarrow$$

$$v_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è vettore direttore di } r_1$$

Invece dalle equazioni parametriche

$$r_2 : \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -2t + 4 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$ si ricava che

$$v_{r_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ è vettore direttore di r_2

Siccome v_{r_1} e v_{r_2} <u>non</u> sono l'uno multiplo dell'altro, cioè

$$\nexists\, \alpha \in \mathbb{R} : \; v_{r_1} = \alpha\, v_{r_2}$$

si conclude che r_1 e r_2 <u>non</u> sono parallele.

(b) Per il piano π_0 abbiamo equazioni parametriche in cui v_{r_1} e v_{r_2} sono vettori di giacitura (così π_0 è parallelo a r_1 e a r_2) e P_0 è punto di passaggio (così $P_0 \in \pi_0$), quindi

$$\pi_0 : \begin{cases} x = 1 \cdot s_1 + 5 \cdot s_2 + 5 \\ y = 0 \cdot s_1 + (-2) \cdot s_2 + (-1) \\ z = 1 \cdot s_1 + (-1) \cdot s_2 + 2 \end{cases} \quad (\forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R})$$

v_{r_1} $\quad v_{r_2}$ $\quad P_0$ $\qquad$ parametri dunque $\circledast_{E.P.}\ \pi_0 : \begin{cases} x = s_1 + 5 s_2 + 5 \\ y = -2 s_2 - 1 \\ z = s_1 - s_2 + 2 \end{cases} \quad (\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R})$

Adesso da $\circledast_{E.P.}$ ricaviamo delle equazioni cartesiane, con l'algoritmo standard di riduzione a scala della matrice completa $(A|\underline{b})$ del sistema $\circledast\ A \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \underline{b}$ che esprime $\circledast_{E.P.}$ come sistema lineare in cui la terna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che esprime un punto in π_0 è calcolata in funzione della coppia di parametri (s_1, s_2), che sono le "variabili". Da $\circledast_{E.P.}$ si ha, riscrivendo il "sistema",

$$\circledast \begin{cases} s_1 + 5 \cdot s_2 = x - 5 \\ -2 s_2 = y + 1 \\ s_1 - s_2 = z - 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x-5 \\ 0 & -2 & y+1 \\ 1 & -1 & z-2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ la riduzione a scala dà

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x-5 \\ 0 & -2 & y+1 \\ 1 & -1 & z-2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III} \mapsto \text{III}-\text{I}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x-5 \\ 0 & -2 & y+1 \\ 0 & -6 & z-2-x+5 \end{array}\right)$$

1° pivot

$$\xrightarrow[\text{III} \mapsto \text{III}-3\text{II}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & x-5 \\ 0 & -2 & y+1 \\ 0 & 0 & z-x-3y \end{array}\right) \Rightarrow$$

il sistema $\circledast$ è compatibile

$\Updownarrow$

$z-x-3y=0$

$\Leftrightarrow$

$$\circledast_{E.C.} : \pi_0 : z-x-3y=0 \quad \text{o} \quad \circledast_{E.C.} : x+3y-z=0$$

è equazione cartesiana del piano π_0. $\square$

$\boxed{4}$ Per ogni $k \in \mathbb{R}$, si risolva il sistema

$$\circledast_k : \begin{cases} kx+y-z=2 \\ -kx+y+(2k-1)z=2k \\ (k-1)y+z=k^2-k+1 \end{cases}$$

Soluzione:

$\circledast_k$ ha matrice completa

$$(A_k|\underline{b}_k) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 2 \\ -k & 1 & (2k-1) & 2k \\ 0 & (k-1) & 1 & k^2-k+1 \end{array}\right)$$

per la quale la riduzione a scala va fatta in due modi diversi, secondo il valore di k, come segue:

1° pivot

$\boxed{k=0}$ $\quad (A_0 | \underline{b}_0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}+\mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II}-\mathrm{I}}$

$\xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}+\mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II}-\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$ $\nexists$ soluzioni del sistema $\circledast_{k=0}$

1° pivot

$\boxed{k \neq 0}$ $\quad (A_k | \underline{b}_k) = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 2 \\ -k & 1 & (2k-1) & 2k \\ 0 & (k-1) & 1 & k^2-k+1 \end{array}\right) \longmapsto$

$\xrightarrow{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II}+\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & (2k-2) & 2k+2 \\ 0 & (k-1) & 1 & k^2-k+1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 2^{-1}\cdot(k-1)\cdot \mathrm{II}]{}$

$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & (2k-2) & 2k+2 \\ 0 & 0 & k\cdot(2-k) & 2-k \end{array}\right)$

$\Downarrow$

<u>SE</u> $k=2 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

ok

$\Rightarrow$ il sistema $\circledast_{k=2}$ ha ∞^1 soluzioni,

che calcolo così:

$$(A_2 \mid \underline{b}_2) \xrightarrow{R.-S.} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 2y + 2z = 6 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t - \frac{1}{2} \\ y = -t + 3 \\ z = t \end{cases} (\forall t \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{k=2} := \{ \text{soluzioni di } \circledast_2 \} = \{ (t - \tfrac{1}{2}, -t+3, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

<u>SE</u> invece $k \neq 2$ – & sempre $k \neq 0$ –

allora

$$\circledast_k \rightsquigarrow \begin{cases} k \cdot x + y - z = 2 \\ 2y + 2(k-1)z = 2(k+1) \\ k(2-k)z = 2-k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k^{-1}(2-y+z) = k^{-1} \cdot (2 - k - \cancel{k^{-1}} + \cancel{k^{-1}}) = 2k^{-1} - 1 \\ y = (k+1) - (k-1)k^{-1} = k + k^{-1} \\ z = k^{-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\forall\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, il sistema $\circledast_k$ ha 1! soluzione, che è

$$\underline{\alpha}_k = (2k^{-1} - 1,\ k + k^{-1},\ k^{-1})$$