

CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2024-2025

Esame scritto del 25 Giugno 2025 — I appello, Sessione Estiva

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Si consideri la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 9 & 7 & 5 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 5}(\mathbb{R})$$

e si indichino con M^1, M^2, M^3, M^4, M^5 le cinque colonne di M e con M_1, M_2, M_3, M_4 le sue quattro righe.

- (a) Calcolare il rango della matrice M .
- (b) Determinare una base esplicita dello spazio $\text{Span}_R(M^1, M^2, M^3, M^4, M^5)$.
- (c) Determinare una base esplicita dello spazio $\text{Span}_R(M_1, M_2, M_3, M_4)$.

[2] — Sia data la matrice

$$S := \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$$

- (a) Determinare tutti gli autovalori di S .
- (b) Per ciascun autovalore di S , calcolare il corrispondente autospazio.
- (c) Determinare tutti gli autovalori e descrivere i corrispondenti autospazi per le due matrici S^2 e S^5 .
- (d) Dimostrare che la matrice S è invertibile.
- (e) Determinare tutti gli autovalori della matrice inversa S^{-1} .

(continua...) $\implies$

[3] — Nello spazio affine $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^3$ di dimensione 3 sul campo $\mathbb{R}$, si considerino le due rette r_1 e r_2 con equazioni cartesiane e equazioni parametriche rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x - z + 14 = 0 \\ 3x + 2y - 3z + 4 = 0 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -2t + 4 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

(a) dimostrare che le due rette r_1 e r_2 non sono tra loro parallele;

(b) indicando con π_0 l'unico piano in $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^3$ parallelo alle rette r_1 e r_2 e passante per il punto $P_0 := (5, -1, 2)$, determinare equazioni cartesiane per π_0 .

[4] — Per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, si risolva il sistema di equazioni lineari (su $\mathbb{R}$)

$$\circledast_k : \begin{cases} kx + y - z = 2 \\ -kx + y + (2k-1)z = 2k \\ (k-1)y + z = k^2 - k + 1 \end{cases}$$