

CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023–2024

Esame scritto del 17 Febbraio 2025 — VI appello, Sessione Invernale

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Nello spazio affine razionale $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^3$ di dimensione 3, si considerino la retta r e la retta ℓ di equazioni cartesiane e parametriche date rispettivamente da

$$r : \begin{cases} x + y + 6 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \ell : \begin{cases} x = 7 + t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{Q})$$

- (a) Determinare se le due rette r ed ℓ siano parallele oppure no;
- (b) Determinare equazioni cartesiane per l'unica retta r_0 parallela alla retta r e passante per il punto $P_0 := (3, -1, 2)$.

[2] — Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

e sia poi A^T la matrice trasposta di A .

(a) Determinare se la matrice A sia invertibile oppure no; in caso affermativo, calcolare esplicitamente la matrice inversa A^{-1} , in caso negativo calcolare un vettore non nullo nel nucleo di A .

(b) Rispondere ai quesiti in (a) per la matrice trasposta A^T .

(c) Rispondere ai quesiti in (a) per la matrice prodotto (righe per colonne) $A \cdot A^T$.

(continua...) $\implies$

[3] — Sia data la matrice

$$S := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$$

(a) Determinare tutti gli autovalori di S .

(b) Per ciascun autovalore di S , calcolare il corrispondente autospazio.

(c) Determinare se la matrice S sia diagonalizzabile oppure no: in caso affermativo, si trovi esplicitamente una base diagonalizzante (cioè composta tutta di autovettori), in caso negativo si motivi adeguatamente la risposta.

[4] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ si considerino i cinque vettori

$$\begin{aligned} u_1 &:= (-1, 1, 0, 2), & u_2 &:= (2, 1, -1, -1), & u_3 &:= (3, 0, -1, -3) \\ u_4 &:= (5, 1, -2, -4), & u_5 &:= (-2, 1, 0, 3) \end{aligned}$$

e il sesto vettore $v(t) := (-12t + 5, -4t + 4, 6t - 4, 10t - 3)$ dipendente dal valore del parametro $t \in \mathbb{R}$. Siano poi

$$U := \text{Span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$$

il sottospazio di V generato dai cinque vettori u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 e

$$W(t) := \text{Span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v(t))$$

il sottospazio generato dai sei vettori $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v(t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(a) Calcolare la dimensione di U .

(b) Determinare esplicitamente una base di U .

(c) Determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali si abbia $v(t) \in U$.

(d) Per ciascun valore di $t \in \mathbb{R}$, determinare la dimensione di $W(t)$.

(e) Per ciascun valore di $t \in \mathbb{R}$, determinare esplicitamente una base di $W(t)$.