CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023–2024

Esame scritto del 3 Febbraio 2025 — Sessione Invernale, V appello

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.... $*$ ....

[1] — Si risolva il sistema lineare

$$\begin{cases} 2\,x_1 \,-\, x_2 \,+\, 2\,x_3 \,+\, 4\,x_4 \;=\; 7 \\ 2\,x_1 \,+\, x_2 \;=\; 3 \\ 2\,x_2 \,-\, 2\,x_3 \,-\, 4\,x_4 \;=\; -4 \end{cases}$$

nelle indeterminate $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4$.

[2] — Sia data la matrice

$$M \;:=\; \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Big(\in \; Mat_{4\times 4}(\mathbb{Q}) \Big)$$

dove “ $\cdot$ ” indica il prodotto righe per colonne tra matrici.

(a) Calcolare M^2 (potenza secondo il prodotto righe per colonne).

(b) Determinare se la matrice M sia invertibile oppure no.

(c) Nel caso in cui M *non* sia invertibile, si determini l'insieme di tutti i vettori $v \in \mathbb{Q}^4$ tali che $M\,v = (0,0,0,0)^T$. Nel caso in cui invece M *sia* invertibile, si calcoli la matrice inversa M^{-1} .

(continua...) $\Longrightarrow$

[3] — Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x\,,y\,,z) \;:=\; (x+2y+3z\,,y+z\,,x-z) \qquad \forall\; (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

(a) Determinare la dimensione e una base esplicita del nucleo di T.

(b) Determinare la dimensione e una base esplicita dell'immagine di T.

[4] — Sia data la matrice

$$S \;:=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\in\; Mat_{4\times 4}(\mathbb{Q})$$

(a) Determinare tutti gli autovalori di S.

(b) Per ciascun autovalore di S, calcolare il corrispondente autospazio.