**CdL in Informatica**

**GEOMETRIA ed ALGEBRA**

*prof. Fabio GAVARINI*

*a.a. 2023–2024*

Esame scritto del 19 Settembre 2024 — Sessione Autunnale, IV appello

*N.B.: compilare il compito in modo* <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

. . . . . . . . . * . . . . . . . . .

**[1]** — Nello spazio affine razionale $\mathbb{A}^3_{\mathbb{Q}}$ di dimensione 3, si considerino il piano $\pi$ e la retta $r$ di equazioni cartesiane rispettivamente

$$\pi : y - z - 9 = 0 \qquad \text{e} \qquad r : \begin{cases} 3x + y + z - 4 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

*(a)* Determinare equazioni parametriche per la retta $r$ ;

*(b)* Determinare equazioni parametriche per il piano $\pi$ ;

*(c)* Descrivere esplicitamente l'intersezione $r \cap \pi$ .

**[2]** — Per ogni $\ell \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A_\ell := \begin{pmatrix} -2 & \ell - 5 & 1 \\ 3 - \ell & \ell - 4 & 0 \\ -8 & 5\ell - 24 & 4 \end{pmatrix} \quad , \qquad \text{nonché i vettori} \quad \underline{b}_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \; , \; \underline{b}_5 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \; .$$

*(a)* Determinare tutti i valori di $\ell \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice $A_\ell$ ammetta una matrice inversa.

*(b)* Calcolare, se possibile, la matrice $A_\ell^{-1}$ per i valori $\ell = 4$ e $\ell = 5$.

*(c)* Risolvere i due sistemi lineari $A_\ell \, \underline{x} = \underline{b}_\ell$ per i valori $\ell = 4$ e $\ell = 5$.

*(continua...)* $\Longrightarrow$

**[3]** — Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R}) .$$

*(a)* Determinare tutti gli autovalori di $A$.

*(b)* Descrivere esplicitamente tutti gli autospazi di $A$.

*(c)* Determinare se la matrice $A$ sia diagonalizzabile oppure no; in caso negativo, si spieghi perché la matrice non sia diagonalizzabile, in caso affermativo si determini esplicitamente una base diagonalizzante, cioè una base composta da autovalori.

**[4]** — Sia $\mathbb{K}$ il campo $\mathbb{Q}$ oppure il campo $\mathbb{Z}_5$. Si considerino i vettori

$$v_1 := \big(t, t, 0, t\big) , \qquad v_2 := \big(1, 2\,t^2 - 1, 3\,t^2 - 1, t^2\big)$$
$$v_3 := \big(2, 2, 1 - t, 3 - t\big) , \qquad v_4 := \big(3, 3, 0, 5\big)$$

nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^4$, al variare di $t \in \mathbb{K}$, e sia $W(t) := Span_{\mathbb{K}}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ il sottospazio vettoriale da essi generato in $\mathbb{K}^4$.

*(a)* Calcolare $dim_{\mathbb{K}}\big(W(t)\big)$.

*(b)* Determinare una base $B$ di $W(t)$ sul campo $\mathbb{K}$.

# GEOMETRIA ED ALGEBRA

19 - 09 - 2024

---

$\boxed{1}$ Si considerino in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{Q}}$ il piano $\pi$ e la retta $r$ dati da

$$\pi : y - z - 9 = 0 \quad e \quad r : \begin{cases} 3x + y + z - 4 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare equazioni parametriche per $r$.

(b) Determinare equazioni parametriche per $\pi$.

(c) Descrivere esplicitamente $r \cap \pi$.

Svolgimento:

(a) Devo risolvere il S.L. che descrive $r$, così

$$r : \begin{cases} 3x + y + z - 4 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{II \mapsto II - 3 \cdot I}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ y - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = 2 - l \\ y = -2 + 2l \\ z = l \end{cases} \quad (\forall l \in \mathbb{Q})}$$ sono equazioni parametriche di $r$, q.e.d.

(b) $\pi: y-z-9=0 \Rightarrow \left\{ y-z-9=0 \right. \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Q} \\ y-z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Q} \\ y \in \mathbb{Q} \\ z = y-9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: \begin{cases} x = h \\ y = k \\ z = -9+k \end{cases} \quad (\forall\, h, k \in \mathbb{Q})}$$

sono equazioni parametriche di $\pi$, q.e.d.

(c) Per descrivere $r \cap \pi$, sostituisco le coordinate $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$ di un punto $P = P(l)$ in $r$ (descritto dalle equazioni cartesiane di $r$) nelle equazioni cartesiane di $\pi$. Così si trova

$$r \cap \pi = \left( \begin{cases} x = 2-l \\ y = -2+2l \\ z = l \end{cases} \right) \cap \left( \left\{ y-z-9=0 \right. \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2+2l) - l - 9 = 0 \Rightarrow -2+2l-l-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l - 11 = 0 \Rightarrow l = 11 \Rightarrow \begin{cases} x = 2-l = -9 \\ y = -2+2l = 20 \\ z = 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r \cap \pi = \left\{ (-9, 20, 11) \right\}}$$

$\boxed{2}$ Per ogni $\ell \in \mathbb{R}$ si considerino

$$A_\ell := \begin{pmatrix} -2 & \ell-5 & 1 \\ 3-\ell & \ell-4 & 0 \\ -8 & 5\ell-24 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_5 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare $\ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\exists A_\ell^{-1}$.

(b) Calcolare, se possibile, $A_\ell^{-1}$ per $\ell = 4$ e $\ell = 5$.

(c) Risolvere i sistemi $A_\ell \underline{x} = \underline{b}$ per $\ell = 4$ e $\ell = 5$.

Svolgimento:

(a) Sappiamo che $\exists A_\ell^{-1} \iff \det(A_\ell) \neq 0$ perciò calcoliamo $A_\ell$. Si ha

$$\det(A_\ell) = \det \begin{pmatrix} -2 & \ell-5 & 1 \\ 3-\ell & \ell-4 & 0 \\ -8 & 5\ell-24 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{(SARRUS)}}{=}$$

$$= -2\cdot(\ell-4)\cdot 4 + \cancel{(\ell-5)\, 0 \cdot(-8)} + (3-\ell)(5\ell-24)\cdot 1 -$$

$$- (-8)\cdot(\ell-4)\cdot 1 - \cancel{(-2)\cdot 0 \cdot (5\ell-24)} - 4\cdot(\ell-5)\cdot(3-\ell) =$$

$$= \cancel{-8\cdot(\ell-4)} + (3-\ell)\cdot(5\ell-24) +$$

$$+ \cancel{8\cdot(\ell-4)} - (3-\ell)\cdot 4(\ell-5) =$$

$$= (3-\ell)\cdot(5\ell-24-4\ell+20) = (3-\ell)\cdot(\ell-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A_\ell) = (3-\ell)\cdot(\ell-4) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ QUINDI

$$(3-l)(l-4) = \det(A_l) \neq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$l \neq 3 \ \& \ l \neq 4$$

e così

$$\boxed{\exists A_l^{-1} \iff l \in \mathbb{R} \setminus \{3,4\}}$$

(b) Per $l = 4$ <u>non</u> esiste $A_l^{-1} = A_4^{-1}$

Per $l = 5$ si ha che $\exists A_5^{-1}$, e

$$A_{l=5} = \begin{pmatrix} -2 & 5-5 & 1 \\ 3-5 & 5-4 & 0 \\ -8 & 5\cdot 5-24 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcolo allora $A_5^{-1}$ col metodo di E. G.

$$\left( A_5 \,\middle|\, I_3 \right) \xrightarrow{E.G.} \left( I_3 \,\middle|\, A_5^{-1} \right)$$

DUNQUE

$$\left( A_5 \,\middle|\, I_3 \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - 4\cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + (-1)\mathrm{I}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \mapsto$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} + \mathrm{III}}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} + \mathrm{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto (-1)^{-1}\mathrm{III}]{\mathrm{I} \mapsto (-2)^{-1}\mathrm{I}}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto (-1)^{-1}\mathrm{III}]{\mathrm{I} \mapsto (-2)^{-1}\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left( I_3 \,\middle|\, A_5^{-1} \right)$$

così
$$A_5^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\boxed{\text{CASO } \ell = 5}$ $\quad A_5 \cdot \underline{x} = \underline{b}_5 \iff \underline{x} = A_5^{-1} \cdot \underline{b}_5$

perciò dalla formula di $A_5^{-1}$ ottenuta in (b) trovo che

$$A_5 \cdot \underline{x} = \underline{b}_5 \iff \underline{x} = A_5^{-1} \cdot \underline{b}_5 \iff$$

$$\iff \underline{x} = A_5^{-1} \cdot \underline{b}_5 = \begin{pmatrix} -2 & -2^{-1} & 2^{-1} \\ -4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

cioè
$$\boxed{\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

__CONTROPROVA__: $A_5 \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ok

$\boxed{\text{CASO } \ell = 4}$ $A_4 \cdot \underline{x} = \underline{b}_4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & -4 & 4 & -4 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -8 & -4 & 4 & -4 \end{array}\right) \longmapsto$$

$A_4$, $\underline{b}_4$

$$\xrightarrow[\text{III} \mapsto \text{III} + (-8)\cdot \text{I}]{\text{II} \mapsto \text{II} + (-2)\cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & +1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & -12 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} + (-4)\cdot \text{II}}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & +1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -x = 1 \\ -y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

il sistema è compatibile ($\exists$ soluzioni)

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

SOLUZIONI del SISTEMA $A_4 \cdot \underline{x} = \underline{b}_4$

CONTROPROVA:

$$A_4 \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ -3+t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - t - 3 + t \\ 1 + 0 + 0 \\ 8 - 4t - 12 + 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ OK}$$

$\boxed{3}$ Sia $$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

(a) Determinare gli autovalori di $A$.

(b) Descrivere gli autospazi di $A$.

(c) Determinare se $A$ sia diagonalizzabile, e in caso positivo determinare una base diagonalizzante (i.e., di autovettori).

Svolgimento:

(a) $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_3) =$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \text{(SARRUS)}$$

$$= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + \cancel{(-1)\cdot(-1)}\cdot 0 + \cancel{(-1)\cdot(-1)}\cdot 0 -$$
$$- \cancel{0\cdot(2-\lambda)}\cdot 0 - (-1)(-1)\cdot(1-\lambda) - (-1)(-1)\cdot(1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\right) = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 3\lambda + \cancel{2} - \cancel{2}) =$$

$$= (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 3\lambda) = (1-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-3)$$

cioè $\boxed{p_A(\lambda) = (1-\lambda)\cdot\lambda(\lambda-3)}$

ORA $Sp(A) := \{\text{autovalori di } A\} =$

$$= \{\text{radici di } p_A(\lambda) = (1-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-3)\} = \{1, 0, 3\}$$

DUNQUE $\boxed{\text{gli autovalori di } A \text{ sono} \quad \lambda' = 0, \quad \lambda'' = 1, \quad \lambda''' = 3}$

(b) $\forall \ \lambda \in Sp(A)$ sia

$$V_\lambda := \text{autospazio (di } A) \text{ di autovalore } \lambda =$$
$$= \operatorname{Ker}(A - \lambda \cdot I_3) =$$
$$= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda I_3) \cdot \underline{x} = \underline{0} \}$$

CASO $\lambda = \lambda' = 0$:

$$V_{\lambda=0} = \operatorname{Ker}(A - 0 \cdot I_3) = \operatorname{Ker}(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \mapsto II + I}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \mapsto III + II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{\lambda=0} = \{ (t,t,t) \mid t \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R} \cdot (1,1,1) \quad \text{con } \{ v_0 := (1,1,1) \} = \text{base di } V_{\lambda=0}}$$

CASO $\lambda = \lambda'' = 1$:

$$V_{\lambda=1} = \mathrm{Ker}\,(A - 1\cdot I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - I_3)\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \mapsto III + (-1)\cdot II} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -l \\ y = 0 \\ z = l \end{cases} \quad (\forall\, l \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} V_{\lambda=1} = \{(-l, 0, l) \mid l \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\cdot(-1, 0, 1) \\ \text{con } \{v_1 := (-1, 0, 1)\} = \text{base di } V_{\lambda=1} \end{array}}$$

CASO $\lambda = \lambda''' = 3$:

$$V_{\lambda=3} = \mathrm{Ker}\,(A - 3I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - 3I_3)\cdot\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \mapsto II + (-2)\cdot I} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \mapsto III + II}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x-y-z=0 \\ y+2z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ y=-2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k \\ y=-2k \\ z=k \end{cases} (\forall k \in \mathbb{R})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} V_{\lambda=3} = \{(k,-2k,k) \mid k \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\cdot(1,-2,1) \\ \text{con} \quad \{v_3 := (1,-2,1)\} = \text{base di } V_{\lambda=3} \end{gathered}}$$

(c) La matrice $A$ ha 3 (distinti) autovalori, ed ha taglia 3, quindi

$$\boxed{A \text{ è diagonalizzabile}}$$

Una base diagonalizzante si ottiene come unione di una base per ciascun autospazio, dunque (ad esempio) può essere

$$\mathcal{B} = \{v_0\} \cup \{v_1\} \cup \{v_3\} = \{v_0, v_1, v_3\} =$$

$$= \{\underbrace{(1,1,1)}_{v_0}, \underbrace{(-1,0,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,-2,1)}_{v_3}\}$$

$\boxed{4}$ Sia $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5\}$, siano

$$v_1 := (t, t, 0, t), \quad v_2 := (1, 2t^2-1, 3t^2-1, t^2)$$

$$v_3 := (2, 2, 1-t, 3-t), \quad v_4 := (3, 3, 0, 5)$$

al variare di $t \in \mathbb{K}$, e sia

$$W(t) := \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

(a) Calcolare $\dim_{\mathbb{K}}(W(t))$.

(b) Determinare una base di $W(t)$ su $\mathbb{K}$.

Svolgimento:

(a) Sappiamo che

$$\dim_{\mathbb{K}}(W(t)) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)) =$$

$= \mathrm{rg}(M_{\underline{v}})$, con $M_{\underline{v}}$ la matrice

$$M_{\underline{v}} := (v_1 | v_2 | v_3 | v_4) = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ t & 2t^2-1 & 2 & 3 \\ 0 & 3t^2-1 & 1-t & 0 \\ t & t^2 & 3-t & 5 \end{pmatrix}$$

Distinguiamo due casi:

1 caso $\boxed{t=0}$: Allora $M_{\underline{v}}$ diventa

$$M_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + \mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} + (-1)\cdot \mathrm{III}]{\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + (-4/3)\cdot \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\xrightarrow{\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} + (-1)\cdot \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftarrow$$

$\boxed{\text{a SCALA}}$ matrice con 3 pivot in 2ª, 3ª, 4ª colonna

QUINDI

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(W(t=0)\right) = rg\left(M_{\underline{v}}\right) = 3$$

& base di $W(t=0) = \{ v_2, v_3, v_4 \} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

° caso $\boxed{t \neq 0}$ : Come prima iniziamo una riduzione a scala di $M_{\underline{v}}$, scegliendo $t$ $(\neq 0)$ come primo pivot:

$$M_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ t & (2t^2-1) & 2 & 3 \\ 0 & (3t^2-1) & (1-t) & 0 \\ t & t^2 & (3-t) & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} + (-1)\cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + (-1)\cdot \mathrm{I}}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 0 & (2t^2-2) & 0 & 0 \\ 0 & (3t^2-1) & (1-t) & 0 \\ 0 & (t^2-1) & (1-t) & 2 \end{pmatrix} =: C(t)$$

ORA osserviamo che (nel passaggio $M_{\underline{v}} \mapsto C(t)$ si sono fatte soltanto operazioni elementari sulle righe !)

$$\det(M_{\underline{v}}) = \det(C(t)) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} t & 1 & 2 & 3 \\ 0 & (2t^2-2) & 0 & 0 \\ 0 & (3t^2-1) & (1-t) & 0 \\ 0 & (t^2-1) & (1-t) & 2 \end{pmatrix} =$$

sviluppo di Laplace lungo la 1ª colonna

$$= t \cdot \det \begin{pmatrix} (2t^2-2) & 0 & 0 \\ (3t^2-1) & (1-t) & 0 \\ (t^2-1) & (1-t) & 2 \end{pmatrix} =$$

è matrice triangolare!

quindi il suo determinante è il prodotto dei coefficienti sulla diagonale

$$= t \cdot (2t^2-2) \cdot (1-t) \cdot 2$$

QUINDI

$$\det(M_{\underline{v}}) = t \cdot (2t^2-2) \cdot (1-t) \cdot 2 =$$
$$= t \cdot 2 \cdot (t-1) \cdot (t+1) \cdot (1-t) \cdot 2 =$$
$$= (-4) \cdot t \cdot (t+1) \cdot (t-1)^2$$

CIOÈ

$$\boxed{\det(M_{\underline{v}}) = (-4) \cdot t \cdot (t+1) \cdot (t-1)^2} \quad (*)$$

N.B.: in effetti questa analisi vale anche per $t = 0$.

Allora $\underbrace{rg(M_{\underline{v}})}_{= \dim_{\mathbb{K}}(W(t))} = 4$ & $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è base di $W(t)$

$$\Uparrow$$

$$\det(M_{\underline{v}}) \neq 0 \overset{(*)}{\iff} t \cdot (t+1) \cdot (t-1)^2 \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{t \neq 0, 1, -1}$$

QUINDI abbiamo in tutto 4 casi:

<u>1° CASO</u> $\boxed{t \in \mathbb{K},\ t \neq 0, +1, -1}$: In tal caso

è $\det(M_{\underline{v}}) \neq 0$ e quindi

$\dim_{\mathbb{K}}(W(t)) = 4$, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è base di $W(t)$

<u>2° CASO</u> $\boxed{t = 0}$: Come già visto, si ha

$\dim_{\mathbb{K}}(W(t=0)) = 3$, con

$\{v_2, v_3, v_4\}$ è base di $W(t=0)$

<u>3° CASO</u> $\boxed{t = +1}$: Proseguiamo la riduzione a scala di $M_{\underline{v}}$, ripartendo da $C(t=+1)$

$$M_{\underline{v}} \rightsquigarrow C(t=+1) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⟸ MATRICE A SCALA, con 3 pivot in colonne <u>1, 2 e 4</u>

QUINDI $\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(W(t=+1)) = rg(M_{\underline{v}}) = 3}$

& base di $W(t=+1)$ è $\{v_1, v_2, v_4\}$

4° CASO $\boxed{t=-1}$ : Come prima, completiamo la riduzione a scala di $M_{\underline{v}}$ ripartendo da $C(t)$

$$M_{\underline{v}} \rightsquigarrow C(t=-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

MATRICE A SCALA con 3 pivot in colonne $1^a$, $2^a$ e $3^a$

QUINDI

$$\dim_{\mathbb{K}}(W(t=-1)) = rg(M_{\underline{v}}) = 3$$

& base di $W(t=-1)$ è $\{v_1, v_2, v_3\}$