CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023–2024

Esame scritto del 19 Settembre 2024 — Sessione Autunnale, IV appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.... $*$ ....

[1] — Nello spazio affine razionale $\mathbb{A}^3_{\mathbb{Q}}$ di dimensione 3, si considerino il piano π e la retta r di equazioni cartesiane rispettivamente

$$\pi : y - z - 9 = 0 \qquad \text{e} \qquad r : \begin{cases} 3\,x + y + z - 4 \,=\, 0 \\ x + z - 2 \,=\, 0 \end{cases}$$

(a) Determinare equazioni parametriche per la retta r ;

(b) Determinare equazioni parametriche per il piano π ;

(c) Descrivere esplicitamente l'intersezione $r \cap \pi$.

[2] — Per ogni $\ell \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A_\ell \;:=\; \begin{pmatrix} -2 & \ell - 5 & 1 \\ 3 - \ell & \ell - 4 & 0 \\ -8 & 5\,\ell - 24 & 4 \end{pmatrix} \quad , \qquad \text{nonché i vettori} \quad \underline{b}_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \;,\; \underline{b}_5 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Determinare tutti i valori di $\ell \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_ℓ ammetta una matrice inversa.

(b) Calcolare, se possibile, la matrice A_ℓ^{-1} per i valori $\ell = 4$ e $\ell = 5$.

(c) Risolvere i due sistemi lineari $A_\ell\,\underline{x} = \underline{b}_\ell$ per i valori $\ell = 4$ e $\ell = 5$.

(continua...) $\Longrightarrow$

[3] — Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}\big(\mathbb{R}\big) \; .$$

(a) Determinare tutti gli autovalori di A.

(b) Descrivere esplicitamente tutti gli autospazi di A.

(c) Determinare se la matrice A sia diagonalizzabile oppure no; in caso negativo, si spieghi perché la matrice non sia diagonalizzabile, in caso affermativo si determini esplicitamente una base diagonalizzante, cioè una base composta da autovalori.

[4] — Sia $\mathbb{K}$ il campo $\mathbb{Q}$ oppure il campo $\mathbb{Z}_5$. Si considerino i vettori

$$v_1 := \big(t, t, 0, t\big) \; , \qquad v_2 := \big(1, 2\,t^2 - 1, 3\,t^2 - 1, t^2\big)$$
$$v_3 := \big(2, 2, 1 - t, 3 - t\big) \; , \qquad v_4 := \big(3, 3, 0, 5\big)$$

nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^4$, al variare di $t \in \mathbb{K}$, e sia $W(t) := Span_{\mathbb{K}}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ il sottospazio vettoriale da essi generato in $\mathbb{K}^4$.

(a) Calcolare $dim_{\mathbb{K}}\big(W(t)\big)$.

(b) Determinare una base B di $W(t)$ sul campo $\mathbb{K}$.