

CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023-2024

Esame scritto del 5 Settembre 2024 — Sessione Autunnale, III appello

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Si consideri il sistema di tre equazioni in tre variabili $x, y, z \in \mathbb{R}$, e dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, dato da

$$\circledast_k : \begin{cases} kx + z = 3k + 2 \\ 8x - y + k^2z = -2 \\ 2ky = -k \end{cases}$$

- (a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema $\circledast_k$ abbia esattamente una e una sola soluzione.
- (b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema $\circledast_k$ non abbia nessuna soluzione.
- (c) Per tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema $\circledast_k$ abbia più di una soluzione, determinare esplicitamente tutte le sue soluzioni.

[2] — Si consideri la matrice $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ data da

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix} .$$

- (a) Calcolare gli autovalori di A .
- (b) Calcolare — descrivendoli esplicitamente — gli autospazi di A .
- (c) Determinare se la matrice A sia diagonalizzabile. In caso negativo, si spieghi perché la matrice non sia diagonalizzabile, in caso affermativo si determini esplicitamente una base diagonalizzante, cioè una base composta da autovalori.

(continua...) $\implies$

[3] — Nello spazio affine reale di dimensione 3, si considerino le rette r_1 ed r_2 di equazioni rispettivamente $r_1 : \begin{cases} 3x + 2y + 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $r_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$.

(a) Dimostrare che r_1 ed r_2 sono sghembe, cioè non sono incidenti né parallele.

(b) Determinare — se esiste — una retta r_3 passante per il punto $O := (0, 0, 0)$ e parallela alla retta r_1 .

[4] — Sia $\mathbb{K}$ un campo qualsiasi, e sia $V := M_{2,3}(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici 2×3 a coefficienti in $\mathbb{K}$, con la sua struttura naturale di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si considerino in V i due sottoinsiemi

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in V \mid d = 0, f = 0 \right\}, \quad U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in V \mid c = -1, d = 3 \right\}$$

Dimostrare che:

(a) W è sottospazio vettoriale di V ;

(b) U non è sottospazio vettoriale di V .