

CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023-2024

Esame scritto del 12 Luglio 2024 — Sessione Estiva, II appello

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Nello spazio affine 3-dimensionale reale $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino i due piani π_1 e π_2 dati dalle equazioni parametriche seguenti:

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 5 + s + 2t \\ y = -1 + 3s - t \\ z = 2 - s + 5t \end{cases} \quad (\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad \pi_2 : \begin{cases} x = -2 + s - t \\ y = -s - 3t \\ z = 1 - 4s + t \end{cases} \quad (\forall s, t \in \mathbb{R})$$

- (a) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio affine $\pi_1 \cap \pi_2$.
- (b) Dimostrare che $\pi_1 \cap \pi_2$ è una retta.
- (c) Determinare equazioni parametriche per la retta ℓ in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ passante per il punto $P_0 := (2, -3, 1)$ e parallela a $\pi_1 \cap \pi_2$.

[2] — Si consideri la matrice $A \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$ data da

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare tutti gli autovalori di A .
- (b) Determinare una base per ciascun autospazio di A .
- (c) Determinare equazioni parametriche per ciascun autospazio di A .
- (d) Determinare, motivando adeguatamente la conclusione, se la matrice A sia diagonalizzabile oppure no.

[3] — Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 13 \\ 2 & 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K}) \quad \text{con } \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}_5\} .$$

(a) Per entrambi i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, calcolare il determinante di A .

(b) Per entrambi i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, determinare se la matrice A sia invertibile oppure no; inoltre, nel caso in cui la matrice A sia invertibile, si calcoli esplicitamente la matrice A^{-1} inversa di A ; nel caso in cui A non sia invertibile, se ne calcoli il rango.

[4] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ si considerino i quattro vettori

$$v_1 := (2, -1, 0, 4), \quad v_2 := (1, 3, -1, 0), \quad v_3 := (4, 5, -2, 4), \quad v_4 := (-1, 1, 0, -4)$$

e sia $W := \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ il sottospazio vettoriale di V generato da essi.

(a) Determinare la dimensione di W .

(b) Determinare una base B_W di W contenuta in $G := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ — cioè “estrarre da G una base B_W di W ”.

(c) Determinare una base B_V di V contenente la base B_W di W trovata al punto (b) precedente — cioè “completare B_W ad una base B_V di V ”.

(d) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v(k) := (1 - 3k, k + 1, -1, k^2 + 3)$ in V appartenga al sottospazio W .

GEOMETRIA ED ALGEBRA

ESAME SCRITTO DEL 12/07/2024

[1] Considerare in $A_{\mathbb{R}}^3$ i piani

$$\pi_1: \begin{cases} x = 5 + s + 2t \\ y = -1 + 3s - t \\ z = 2 - s + 5t \end{cases} \quad (\forall s, t \in \mathbb{R})$$

e

$$\pi_2: \begin{cases} x = -2 + s - t \\ y = -s - 3t \\ z = 1 - 4s + t \end{cases} \quad (\forall s, t \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare equazioni cartesiane per $\pi_1 \cap \pi_2$.

(b) Dimostrare che $\pi_1 \cap \pi_2$ è una retta.

(c) Determinare equazioni parametriche per la retta l in $A_{\mathbb{R}}^3$ passante per $P_0 := (2, -3, 1)$ e parallela a $\pi_1 \cap \pi_2$.

Svolgimento:

(a) Equazioni cartesiane per $\pi_1 \cap \pi_2$ si possono ottenere mettendo a sistema equazioni cartesiane di π_1 con equazioni cartesiane di π_2 . Quindi dobbiamo trovare queste ultime, che saranno della forma

$$\pi_1: f_1(x) - c_1 = 0 \quad \& \quad \pi_2: f_2(x) - c_2 = 0$$

con f_1, f_2 funzioni lineari da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$,
 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, e $x = (x, y, z)$.

Per trovare le equazioni cartesiane di π_1 e π_2 applichiamo un metodo standard:

$$\boxed{\pi_1} \text{ da } \pi_1: \begin{cases} x = 5 + 1 + 2t \\ y = -1 + 3s - t \\ z = 2 - 1 + 5t \end{cases} \quad (\forall s, t \in \mathbb{R}) \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{\star}_1 \begin{cases} 1 + 2t = x - 5 \\ 3s - t = y + 1 \\ -1 + 5t = z - 2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & +2 & x-5 \\ 3 & -1 & y+1 \\ -1 & 5 & z-2 \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

$$\overset{\parallel}{(A|\underline{b})}$$

$\Downarrow$

ora imponiamo che il sistema $\textcircled{\star}_1$ (di 3 equazioni nelle due variabili s e t) abbia 1! soluzione; questo impone condizioni nella colonna dei termini noti, perciò su (x, y, z)

per calcolare $\text{rg}(A|\underline{b})$ e $\text{rg}(A)$, riduco $(A|\underline{b})$ in forma a scala:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 2 & x-5 \\ 3 & -1 & y+1 \\ -1 & 5 & z-2 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow \begin{array}{l} \text{II} \mapsto \text{II} - 3\text{I} \\ \text{III} \mapsto \text{III} + \text{I} \end{array}$$

$\textcircled{\star}_1$ ha 1! soluzione

$\Uparrow$

$$\text{rg}(A|\underline{b}) = \text{rg}(A)$$

con

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} x-5 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 2 & x-5 \\ 0 & \textcircled{-7} & -3x+y+16 \\ 0 & 7 & x+z-7 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow \text{III} \mapsto \text{III} + \text{II}$$

$$\text{rg}(A|\underline{b}) = \text{rg}(A) = 2$$

$\Uparrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 2 & x-5 \\ 0 & \textcircled{-7} & -3x+y+16 \\ 0 & 0 & \textcircled{-2x+y+z+9} \end{array} \right)$$

-7

$$\boxed{-2x + y + z + 9 = 0}$$

QUINDI una possibile equazione cartesiana per π_1 è data da

$$\textcircled{*}_1 \pi_1: -2x + y + z + 9 = 0$$

CONTROPROVA: sostituendo in $\textcircled{*}_1$ i
valori

$$x = 5 + s + 2t$$

$$y = -1 + 3s - t \quad (\forall s, t \in \mathbb{R})$$

$$z = 2 - s + 5t$$

si ottiene effettivamente l'identità

$$0 = 0 \quad (\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad \textcircled{OK}$$

$$\boxed{\pi_2} \text{ Da } \pi_2: \begin{cases} x = -2 + s - t \\ y = -s - 3t \\ z = 1 - 4s + t \end{cases} \quad (\forall s, t \in \mathbb{R})$$

imponiamo

$$\text{rg}(A|\underline{b}) = \text{rg}(A)$$

9 calcoli danno

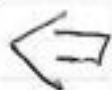
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$(A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & -1 & x+2 \\ -1 & -3 & y \\ -4 & 1 & z-1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} \mapsto \text{III} + 4\text{I}]{\text{II} \mapsto \text{II} + \text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & -1 & x+2 \\ 0 & \textcircled{-4} & x+y+2 \\ 0 & -3 & 4x+z+7 \end{array} \right)$$

$$\text{rg}(A|\underline{b}) = \text{rg}(A) = 2$$



$$\boxed{13x - 3y + 4z + 22 = 0} \quad -3-$$



$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x+2 \\ 0 & -4 & x+y+2 \\ 0 & 0 & 13-3y+4z+22 \end{array} \right)$$

$$\swarrow \text{III} \mapsto 4 \cdot \text{III} - 3 \cdot \text{II}$$

QUINDI una possibile equazione cartesiana per π_2 è data da

$$*_{\pi_2} \pi_2: 13x - 3y + 4z + 22 = 0$$

CONCLUDENDO, mettiamo a sistema le due equazioni $*_{\pi_1}$ e $*_{\pi_2}$ e otteniamo

$$\pi_1 \cap \pi_2: \begin{cases} -2x + y + z + 9 = 0 \\ 13x - 3y + 4z + 22 = 0 \end{cases}$$

che sono equazioni cartesiane per $\pi_1 \cap \pi_2$.

(b) Per dimostrare che $\pi_1 \cap \pi_2$ è una retta ne trovo equazioni parametriche,

((N.B.: questo sarà utile anche per (c)!))

→ cioè trovo le soluzioni esplicite del sistema lineare dato dalle equazioni cartesiane di $\pi_1 \cap \pi_2$, trovate in (a).

I calcoli danno

$$\pi_1 \cap \pi_2: \begin{cases} -2x + y + z + 9 = 0 \\ 13x - 3y + 4z + 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = -9 \\ 13x - 3y + 4z = -22 \end{cases} \Rightarrow (A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -9 \\ 13 & -3 & 4 & -22 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow (A|\underline{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -9 \\ 13 & -3 & 4 & -22 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{II} \mapsto 2 \cdot \text{II} + 13 \cdot \text{I}}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -9 \\ 0 & 7 & 21 & -161 \end{array} \right) \Rightarrow \text{ci dà il sistema}$$

$$\begin{cases} -2x = -y - t - 9 \\ 7y = -161 - 21t \\ z = t \quad (t \in \mathbb{R}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = -9 \\ 7y + 21z = -161 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_1 \cap \pi_2: \begin{cases} x = -7 - t \\ y = -23 - 3t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE
per $\pi_1 \cap \pi_2$

che qui si vede

già che

$$\text{rg}(A|\underline{b}) = \text{rg}(A) = \boxed{2}$$

per il sistema

$$*: A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{b}$$

in cui le variabili

sono 3; QUINDI

lo spazio $\mathcal{L}$ delle soluzioni del
sistema lineare $*$ ha dimensione

$$3 - 2 = 1, \Rightarrow \mathcal{L} \text{ è una RETTA} \quad \text{q.e.d.}$$

CONTRAOPROVA: sostituendo
questi valori di x, y, z

nelle equazioni cartesiane
di $\pi_1 \cap \pi_2$ si trova $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

CONTINUA

(e) Sapendo che $\pi_1 \cap \pi_2$ è una retta di equazioni parametriche

$$\pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} x = -7 + (-1) \cdot t \\ y = -23 + (-3) \cdot t \\ z = 0 + 1 \cdot t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

ETTORE DIRETTORE

abbiamo che ogni retta l' parallela a $\pi_1 \cap \pi_2$ avrà equazioni parametriche della forma

$$l' : \begin{cases} x = x_0 + (-1) \cdot t \\ y = y_0 + (-3) \cdot t \\ z = z_0 + 1 \cdot t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

dove (x_0, y_0, z_0) è il punto di l' che si ottiene in corrispondenza del valore $t=0$ del parametro t .

Allora la retta l richiesta - che è parallela a l e passante per il punto $P_0 := (2, -3, 1)$ - si ottiene imponendo $(x_0, y_0, z_0) = (2, -3, 1)$,

QUINDI la retta l ha equazioni parametriche

$$l : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

2

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$$

- Determinare tutti gli autovalori di A .
- Determinare una base per ciascun autospazio di A .
- Determinare equazioni parametriche per ciascun autospazio di A .
- Determinare se A è diagonalizzabile oppure no.

Svolgimento:

In generale, $\forall \lambda \in \mathbb{Q}$ poniamo

$$V_\lambda := \{ x \in \mathbb{Q}^4 \mid x \text{ è soluzione di } \textcircled{*}_\lambda: (A - \lambda I_4) \cdot x = \underline{0} \}$$

poi,

$$\lambda \text{ è autovalore di } A \iff V_\lambda \neq \{0\}$$

$$V_\lambda \text{ è autospazio} \iff \lambda \text{ è autovalore}$$

Da questo ora segue
lo svolgimento relativo
ai vari quesiti (a) $\rightarrow$ (d)...

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ V_\lambda \neq \{0\} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ \det(A - \lambda I_4) = 0 \end{array}$$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{Q}$ si ha

λ è autovalore di $A \iff \det(A - \lambda I_4) = 0$

QUINDI cerchiamo tutte le soluzioni della equazione (in λ)

$$\textcircled{*} \det(A - \lambda \cdot I_4) = 0$$

I calcoli danno

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -4-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

sviluppo di LAPLACE 4^a RIGA

$$= (-1)^{4+4} \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 4 & -4-\lambda & 0 \\ -3 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (+1) \cdot \left((-\lambda)(-4-\lambda)(-\lambda) + \cancel{2 \cdot 0 \cdot (-3)} + 4 \cdot 3 \cdot 1 - \right. \\ \left. - 1 \cdot (-4-\lambda) \cdot (-3) - \cancel{3 \cdot 0 \cdot (-\lambda)} - 2 \cdot 4 \cdot (-\lambda) \right) =$$

$$= (-\lambda)^2 \cdot (-4-\lambda) + 12 + 3 \cdot (-4-\lambda) + 8\lambda =$$

$$= (+\lambda)^2 \cdot (-4-\lambda) + \cancel{12} - \cancel{12} - 3\lambda + 8\lambda =$$

$$= \lambda \cdot (\lambda \cdot (-4-\lambda) + 5) = \lambda \cdot (-\lambda^2 - 4\lambda + 5)$$

QUINDI la nostra equazione $\textcircled{*}$ diventa

$$\lambda(-\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda \in \{0, 1, -5\}$$

AUTOVALORI di A

(b)-(c) Calcoliamo ora i tre autospazi

V_0, V_1, V_{-5} relativi ai tre autovalori

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -5.$$

V_0 Risolviamo il sistema omogeneo

$$(A - 0 \cdot I_4) \cdot \underline{x} = \underline{0} \quad \text{cioè} \quad A \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$(A | \underline{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{e' superfluo...}} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{III} \mapsto 4 \cdot \text{III} + 3 \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV} \mapsto \text{IV} - 3 \cdot \text{III}} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 3$$

3 pivot

$$\dim(V_0) = 4 - 3 = 1$$

$$e_1, e_2$$

$$m_0^s = 1$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -t/2 \\ x_2 = -t/2 \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{Q})$$

per $t := 2$,

$$B_0 := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

una base di V_0

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (b) \\ ok \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c) \\ ok \end{pmatrix} \Leftarrow$$

equazioni parametriche di V_0

V_1

risolviamo il sistema omogeneo

$$(A - 1 \cdot I_4) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$A - 1 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II} \mapsto \text{II} + 4\text{I} \\ \text{III} \mapsto \text{III} - 3\text{I}}} \begin{matrix} 2 \text{ pivot} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} + \text{II}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A - 1 \cdot I_4) = 2$$

$$V_1: \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ +3x_2 + 4x_3 - 12x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$m_1^G := \dim(V_1) = 4 - 2 = 2$$

$$V_1: \begin{cases} x_1 = -5/3 s + 5t \\ x_2 = -4/3 s + 4t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \quad (\forall s, t \in \mathbb{Q})$$

equazioni
parametriche
di V_1

$\Leftrightarrow (L)_{\text{ok}}$

per $(s, t) = (3, 0)$ e $(s, t) = (0, 1)$

troviamo due vettori che danno una
base di V_1 , precisamente

$$B_1 := \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow (L)_{\text{ok}}$$

V_{-5}

Risoliamo il sistema omogeneo

$$(A + 5 \cdot I_4) \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$A + 5 \cdot I_4 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{II} \mapsto 5 \cdot \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} \mapsto 5 \cdot \text{III} + 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 12 \\ 0 & 21 & 28 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} + 2 \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 88 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\xrightarrow{\text{IV} \mapsto \text{IV} - 15^{-1} \cdot \text{III}} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 88 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3 pivot

$$\Rightarrow \begin{array}{c} m_{-5}^G \\ \text{II} \\ \dim(V_{-5}) \\ \text{II} \\ 4 - 3 = 1 \end{array}$$

$$V_{-5}: \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_2 - 4x_3 + 12x_4 = 0 \\ 88x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_{-5}: \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}t \\ x_2 = -\frac{4}{3}t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \text{per } t=3 \text{ si trova}$$

equazioni parametriche di V_{-5}

$$B_{-5} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

che è una base di V_{-5}

$\cong (e)_{\text{OK}}$

$(e)_{\text{OK}}$

(d) A è diagonalizzabile



la somma delle molteplicità geometriche ($m_\lambda^G := \dim(V_\lambda)$) di tutti gli autovettori λ è uguale alla dimensione di $\mathbb{Q}^4$ (che è 4)

QUINDI

$$A \text{ è diagonalizzabile} \Leftrightarrow m_0^G + m_1^G + m_{-5}^G = 4$$

MA abbiamo già trovato che

$$m_0^G := \dim(V_0) = 1$$

$$m_1^G := \dim(V_1) = 2$$

$$m_{-5}^G := \dim(V_{-5}) = 1$$

quindi $m_0^G + m_1^G + m_{-5}^G = 1 + 2 + 1 = 4$

perciò

A è diagonalizzabile.



3 Lia

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 13 \\ 2 & 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$$

con $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}_5\}$

(a) Calcolare $\det(A)$

(b) Determinare se A è invertibile o no.

Se sì, calcolare A^{-1} .

Se no, calcolare $\text{rg}(A)$.

Svolgimento: Possiamo trattare tutti i quesiti simultaneamente. I calcoli sono gli stessi in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e in $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, ma bisogna far attenzione a "leggere" i risultati, a seconda che sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

Calcoli: operiamo su $(A | I_4)$ con eliminazione di Gauss in modo da ridurre la parte di sinistra a forma triangolare

(app.)

$$(A | I_4) \rightsquigarrow (\nabla^* | e)$$

Se in (∇^*) troveremo che

- tutti i termini diagonali sono $\neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile
- $\exists$ un termine diagonale $= 0 \Rightarrow A$ non è invertibile

ORA

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 5 & 8 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 13 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 11 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \nearrow \\ \\ \\ \searrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 13 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 11 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \text{II} \mapsto \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} \mapsto \text{III} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{IV} \mapsto \text{IV} - 2 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\mapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{5} & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

triangolare superiore

N.B.: ci sono stati 2 scambi di righe

$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10 \Rightarrow \det(A) = 10$$

$$\textcircled{a) e' ok} \Leftrightarrow \text{N.B.: } \det(A) \neq 0 \text{ per } k = \mathbb{Z}_5$$

③ 1, 1, 2, 5 sono tutti $\neq 0$ in $k = \mathbb{R}$

② $1 \neq 0, 1 \neq 0, 2 \neq 0$ MA $\boxed{5 = 0}$ in $k = \mathbb{Z}_5$

QUINDI A è invertibile per $k = \mathbb{R}$

(e) $\Rightarrow$ &

A non è invertibile per $k = \mathbb{Z}_5$

INOLTRE

• $K = \mathbb{Z}_5 \Rightarrow A \xrightarrow{\text{E.G.}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

//

$\text{rg}(A)$
" $\# \text{ pivot}$
" 3

$\Leftarrow 3$ pivot

$\Leftarrow \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

cioè

$\text{rg}(A) = 3$ per $K = \mathbb{Z}_5$

• $K = \mathbb{R} \Rightarrow$ operiamo una E.G. $\uparrow$

$(A | I_4) \xrightarrow{\text{E.G.} \downarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{5} & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(\text{E.G.} \uparrow)}$

$\begin{array}{l} \text{III} \mapsto \text{III} - \frac{3}{5} \cdot \text{IV} \\ \text{II} \mapsto \text{II} - \frac{3}{5} \cdot \text{IV} \\ \text{I} \mapsto \text{I} - \frac{4}{5} \cdot \text{IV} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & \frac{13}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{5} & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$

$\begin{array}{l} \text{I} \mapsto \text{I} - \frac{3}{2} \cdot \text{III} \\ \text{II} \mapsto \text{II} - \text{III} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \frac{19}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$

$$\xrightarrow{I \mapsto I - 2 \cdot II} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 13/5 & 1/10 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4/5 & -3/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \mapsto$$

$$\begin{array}{l} III \mapsto 2^{-1} \cdot III \\ IV \mapsto 5^{-1} \cdot IV \end{array} \mapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 13/5 & 1/10 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2/5 & -3/10 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\quad}_{I_4} \qquad \qquad \underbrace{\quad}_{A^{-1}}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 13/5 & 1/10 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2/5 & -3/10 & 1/2 \\ 0 & -2/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -20 & 26 & 1 & 5 \\ 10 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

CONTROPROVA: il calcolo diretto del prodotto righe per colonne dà effettivamente (come deve essere)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 13 \\ 2 & 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 13/5 & 1/10 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2/5 & -3/10 & 1/2 \\ 0 & -2/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$A \cdot A^{-1} = I_4$$

[4] In $V := \mathbb{R}^4$ consideriamo

$$v_1 := (2, -1, 8, 4), \quad v_2 := (1, 3, -1, 0)$$

$$v_3 := (4, 5, -2, 4), \quad v_4 := (-1, 1, 0, -4)$$

e $W := \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$

(a) Determinare $\dim(W)$

(b) Determinare una base di W contenuta in $G := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, indicata con B_W

(c) Determinare una base B_V di $V := \mathbb{R}^4$ che contenga la base B_W di W .

(d) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si abbia $v(k) := (1-3k, k+1, -1, k^2+3) \in W$.

Svolgimento:

Adottiamo un metodo standard con il quale affrontiamo simultaneamente i quattro quesiti (a) $\rightarrow$ (d).

Supponiamo di avere in K^n - con K un campo qualsiasi - (nel nostro caso è $K = \mathbb{R}$ e $n = 4$) alcuni vettori

$$u_1, \dots, u_l \quad (l \in \mathbb{N}^+).$$

Ciascun u_j ($j = 1, \dots, l$) è una n -pla di elementi in K , dato che $u_j \in K^n$.

Costruiamo allora la matrice $n \times l$

$$M_u := (u_1 | u_2 | \dots | u_l) \in \text{Mat}_{n \times l}(K)$$

che ha per colonne i vettori $u_1, \dots, u_l$
e consideriamo lo spazio vettoriale

$$U := \text{Span}_K(u_1, u_2, \dots, u_l)$$

generato da $\{u_1, u_2, \dots, u_l\}$ in K^n .

Abbiamo allora i seguenti fatti:

$$\textcircled{1} \dim_K(U) = \text{rg}(M_u)$$

(questo è proprio il significato di
"rango" pensato come "rango-colonne")

In particolare, calcolando $\text{rg}(M_u)$
tramite una riduzione a scala

$$M_u \xrightarrow{\text{E.G.}} S_u \leftarrow (\text{a scala})$$

s'ha

$$\text{rg}(M_u) = \text{rg}(S_u) = \# \text{pivot in } S_u$$

Inoltre

$\textcircled{2}$ I vettori colonna di M_u che stanno
nelle posizioni corrispondenti alle
colonne dei pivot in S_u formano
una base di U ; cioè, se in S_u i
pivot $p_1, \dots, p_r$ — con $r = \text{rg}(M_u) = \text{rg}(S_u)$ —
stanno nelle colonne (di S_u) $j_1, \dots, j_r$,

allora

$$B_u := \{M^{j_1}, \dots, M^{j_r}\} = \{u_{j_1}, \dots, u_{j_r}\}$$

è una base di U , contenuta nell'insieme di generatori originale $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Ora applichiamo questo metodo per rispondere in un colpo solo ai quesiti (a) $\rightarrow$ (d).

Consideriamo la matrice

$$M_u := (v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | \underline{e}_1 | \underline{e}_2 | \underline{e}_3 | \underline{e}_4 | v(k))$$

dove $\underline{e}_j := (\dots, 0, 1, 0, \dots)$ è il j -esimo vettore della base $\hat{\textcircled{1}}$ canonica di $\mathbb{R}^4$ ($\forall j=1, \dots, 4$). In dettaglio, è

$$M_u = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1-3k \\ k+1 \\ -1 \\ k^2+3 \end{array}$$

Riduciamo tale M a scala: l'E.C. $\downarrow$ ci dà

$$M_u = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{-1} & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} 1-3k \\ k+1 \\ -1 \\ k^2+3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{SCAMBIO } I \leftrightarrow II$$

$$\begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \textcircled{-1} & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} k+1 \\ 1-3k \\ -1 \\ k^2+3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{II \mapsto II + 2I} \\ \xrightarrow{IV \mapsto IV + 4 \cdot I} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \mapsto \text{II} + 2\text{I} \\ \text{IV} \mapsto \text{IV} + 4\text{I} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} \textcircled{-1} & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-3k \\ 0 & 7 & 14 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3-5k \\ 0 & \textcircled{-1} & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 12 & 24 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & k^2+4k+? \end{array} \right) \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array}$$

$$\nearrow \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} \textcircled{-1} & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-3k \\ 0 & \textcircled{-1} & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 14 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3-5k \\ 0 & 12 & 24 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & k^2+4k+? \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{III} \mapsto \text{III} + ? \cdot \text{II}} \\ \xrightarrow{\text{IV} \mapsto \text{IV} + 12 \cdot \text{II}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc|c} \textcircled{-1} & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-3k \\ 0 & \textcircled{-1} & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 & 7 & 0 & -4-5k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{4} & 12 & 1 & k^2+4k-5 \end{array} \right) =: S_u$$

⇐ a SCALA!

Ora:

(2) Se leggiamo la sottomatrice di S_u composta dalle prime quattro colonne otteniamo

$$S_W := \left(\begin{array}{cccc} \textcircled{-1} & 3 & 5 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Questa è, fine matrice a scala, e per costruzione è esattamente una riduzione a scala della matrice

$$M_W := \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -4 \end{array} \right) = (v_1 | v_2 | v_3 | v_4)$$

data dalle prime quattro colonne di M .

Adesso, applicando il discorso generale a questo caso particolare, dalla forma esplicita della matrice S_W leggiamo che

S_W ha 3 pivot
(-1, -1, e 1 rispettivamente in 1^a, 2^a e 3^a riga)

QUINDI $\text{rg}(S_W) = 3, \Rightarrow \text{rg}(M_W) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(W) = \text{rg}(M_W) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(W) = 3 \Rightarrow \underline{(a)}$

(b) Sempre dal discorso generale, siccome i tre pivot di S_W stanno nelle colonne 1^a, 2^a e 4^a, ne deduciamo che i vettori colonna nella 1^a, 2^a e 4^a colonna di M_W formano una basi dello spazio

$$W := \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

generato da $G := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

e cioè

$B_W = \{v_1, v_2, v_4\}$ è una base di W , contenuta in G

q.e.d. mo (b)

(c) Consideriamo adesso la ~~la~~ sottomatrice M' di M_W costituita dalle prime 8 colonne di M_W , cioè

$$M' := (v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | \underline{e}_1 | \underline{e}_2 | \underline{e}_3 | \underline{e}_4)$$

che in dettaglio è data da

$$M' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Le sue colonne generano tutto $\mathbb{R}^4$, dato che esso è generato anche da $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ - la basi canonica di $\mathbb{R}_4$ - cioè delle ultime quattro colonne di M' .

Riducendo a scala M' , il metodo generale ci farà trovare una base di $\mathbb{R}^4$, che sarà formata sia sia da colonne di M' prese nell'ordine - dalla prima all'ultima - in modo che ogni nuova colonna selezionata sia linearmente indipendente dalle precedenti, fino a trovarne abbastanza da ottenere una base.

Gra siccome M' ha per sottomatrici M_w , e tutte sono sottomatrici di M , la riduzione a scala di M' è semplicemente data dalle prime otto colonne nella riduzione a scala di M_w , e conterrà la riduzione a scala di M_w . Precisamente, estraendo le prime otto colonne da S_u otteniamo

$$S' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 12 & 1 \end{array} \right)$$

che è la riduzione a scala di M' .

In tale S' , i quattro pivot stanno nelle colonne $1^a, 2^a, 4^a$ e 6^a ; quindi le corrispondenti colonne $-1^a, 2^a, 4^a$ e 6^a - nella matrice M' ci danno una base di

$$\text{Span}(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3 | \underline{v}_4 | \underline{e}_1 | \underline{e}_2 | \underline{e}_3 | \underline{e}_4) = \mathbb{R}^4$$

che è $B_V := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4, \underline{e}_2\}$

la quale - per costruzione! - contiene la base B_W di W ottenuta in precedenza, come richiesto and (c)

vetto $\underline{v}(k)$ appartiene a

$$W := \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4) \quad \text{se e soltanto se}$$

$$W := \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4) = \text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}(k))$$

e questo è una soltan equivalente a

$$\text{rg}(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3 | \underline{v}_4) = \text{rg}(\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3 | \underline{v}_4 | \underline{v}(k))$$

cioè

$$\text{rg}(M_W) = \text{rg}(M_k) \quad (*)$$

dove $M_k = (M_W | \underline{v}(k))$.

Studiamo allora $\text{rg}(M_k)$ tramite riduzione a scala. Quest'ultima, senza fare

altri calcoli, si ottiene con: detta

$S_k :=$ riduzione a scala di M_k

si ha $M_k =$ sottomatrice di M_u data
dalle colonne $1^a, 2^a, 3^a, 4^a$ e 5^a



$S_k =$ sottomatrice di S_u data
dalle colonne $1^a, 2^a, 3^a, 4^a$ e 5^a

con, leggendo S_u , troviamo

$$S_k = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 3 & 5 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{S_w} \begin{pmatrix} 1-3k \\ -1 \\ -4-5k \\ k^2+4k-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_w \begin{pmatrix} 1-3k \\ -1 \\ -4-5k \\ k^2+4k-5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Ora

$$\operatorname{rg}(M_w) = \operatorname{rg}(S_w) = 3$$

$$\& \operatorname{rg}(M_k) = \operatorname{rg}(S_k) = \begin{cases} 4 & \text{se } k^2+4k-5 \neq 0 \\ 3 & \text{se } k^2+4k-5 = 0 \end{cases}$$

QUINDI in conclusione è

$$\sqrt{k} \in W \iff \operatorname{rg}(M_w) = \operatorname{rg}(M_k)$$



$$k \in \{+1, -5\} \iff k^2+4k-5=0$$