CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023–2024

Esame scritto del 12 Luglio 2024 — Sessione Estiva, II appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

.... $*$ ....

[**1**] — Nello spazio affine 3-dimensionale reale $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino i due piani π_1 e π_2 dati dalle equazioni parametriche seguenti:

$$\pi_1 : \begin{cases} x = 5 + s + 2t \\ y = -1 + 3s - t \\ z = 2 - s + 5t \end{cases} \quad \big(\forall\, s,t \in \mathbb{R}\big) \qquad \pi_2 : \begin{cases} x = -2 + s - t \\ y = -s - 3t \\ z = 1 - 4s + t \end{cases} \quad \big(\forall\, s,t \in \mathbb{R}\big)$$

(a) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio affine $\pi_1 \cap \pi_2$.

(b) Dimostrare che $\pi_1 \cap \pi_2$ è una retta.

(c) Determinare equazioni parametriche per la retta ℓ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $P_0 := (2\,, -3\,, 1)$ e parallela a $\pi_1 \cap \pi_2$.

[**2**] — Si consideri la matrice $A \in Mat_{4\times4}(\mathbb{Q})$ data da

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare tutti gli autovalori di A.

(b) Determinare una base per ciascun autospazio di A.

(c) Determinare equazioni parametriche per ciascun autospazio di A.

(d) Determinare, motivando adeguatamente la conclusione, se la matrice A sia diagonalizzabile oppure no.

[3] — Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 13 \\ 2 & 4 & 8 & 11 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{K}) \qquad \text{con} \quad \mathbb{K} \in \big\{\mathbb{R}\,,\mathbb{Z}_5\big\}\ .$$

(a) Per entrambi i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, calcolare il determinante di A.

(b) Per entrambi i casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, determinare se la matrice A sia invertibile oppure no; inoltre, nel caso in cui la matrice A sia invertibile, si calcoli esplicitamente la matrice A^{-1} inversa di A; nel caso in cui A non sia invertibile, se ne calcoli il rango.

[4] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$ si considerino i quattro vettori

$$v_1 := (\,2\,,-1\,,0\,,4\,)\ ,\quad v_2 := (\,1\,,3\,,-1\,,0\,)\ ,\quad v_3 := (\,4\,,5\,,-2\,,4\,)\ ,\quad v_4 := (\,-1\,,1\,,0\,,-4\,)$$

e sia $W := Span\big(v_1\,,v_2\,,v_3\,,v_4\big)$ il sottospazio vettoriale di V generato da essi.

(a) Determinare la dimensione di W.

(b) Determinare una base B_W di W contenuta in $G := \big\{v_1\,,v_2\,,v_3\,,v_4\big\}$ — cioè "estrarre da G una base B_W di W".

(c) Determinare una base B_V di V contenente la base B_W di W trovata al punto *(c)* precedente — cioè "completare B_W ad una base B_V di V".

(d) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $v(k) := (\,1-3\,k\,,k+1\,,-1\,,k^2+3\,)$ in V appartenga al sottospazio W.