CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023–2024

Esame scritto del 24 Giugno 2024 — Sessione Estiva, I appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[1] — Si consideri il sistema di tre equazioni in tre variabili $x, y, z \in \mathbb{R}$, e dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, dato da

$$\circledast_k \, : \, \begin{cases} x - y = 1 \\ k\,x + y + z = 1 \\ (k+1)\,y = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema sia compatibile (cioè ammetta almeno una soluzione).

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni è una retta — in seguito indicata con ℓ_k — in $\mathbb{R}^3$.

(c) Per tutti i valori di k di cui al punto *(b)*, si esprima l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast_k$ — cioè la retta ℓ_k — tramite equazioni parametriche e tramite equazioni cartesiane.

(d) Per tutti i valori di k di cui al punto *(b)*, si determinino equazioni parametriche della retta passante per il punto $P_0 := (1,0,0)$ e parallela alla retta ℓ_k.

[2] — Si considerino la matrice $A \in Mat_{3\times3}(\mathbb{Q})$ e il vettore $\underline{b} \in \mathbb{Q}^3$ definiti da

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(a) Dimostrare che la matrice A è invertibile.

(b) Calcolare la matrice A^{-1} inversa di A.

(c) Determinare se la matrice A^2 sia invertibile oppure no.

(d) Determinare se esista un $\underline{x} \in \mathbb{Q}^3$ tale che $A\,\underline{x} = \underline{b}$. In caso negativo, si giustifichi perché un tale $\underline{x}$ non esista; in caso positivo, si determini esplicitamente un tale $\underline{x}$.

[3] — Si consideri la matrice $M := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 3}(\mathbb{Q})$.

(a) Determinare il rango di M .

(b) Determinare una base del sottospazio vettoriale $Im(M)$ di $W := \mathbb{Q}^4$.

(c) Determinare una base del sottospazio vettoriale $Ker(M)$ di $V := \mathbb{Q}^3$.

[4] — Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

(a) Determinare tutti gli autovalori di A .

(b) Descrivere esplicitamente gli autospazi di A , tramite equazioni parametriche.

(c) Determinare equazioni cartesiane (esplicite) di ciascun autospazio di A .

(d) Determinare se la matrice A sia diagonalizzabile oppure no; inoltre,

(d.-) nel caso in cui la matrice A non sia diagonalizzabile, se ne spieghi esplicitamente la ragione;

(d.+) nel caso in cui la matrice A sia diagonalizzabile, si calcoli esplicitamente una base di autovettori di A per lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$.

GEOMETRIA & ALGEBRA

24/6/2024

$\boxed{1}$ Si consideri il sistema

$$\circledast_k : \begin{cases} x - y = 1 \\ kx + y + z = 1 \\ (k+1)\cdot y = 0 \end{cases}$$

in $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, dipendente da $k \in \mathbb{R}$.

(a) Trovare per quali valori $k \in \mathbb{R}$ il sistema $\circledast_k$ sia compatibile

(b) Per quali valori $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni di $\circledast_k$ è una retta ℓ_k ?

(c) Per i valori di k di cui in (b), descrivere la retta ℓ_k tramite equazioni parametriche e equazioni cartesiane.

(d) Per tutti i valori di k di cui in (b), trovare equazioni parametriche della retta ℓ_k° passante per $P_0 := (1, 0, 0)$ e parallela a ℓ_k

Svolgimento:

Risolviamo il sistema $\circledast_k$ tramite riduzione a scala, come segue:

$$\circledast_k \rightsquigarrow (A_k|\underline{b})_k = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

= matrice completa del sistema $\circledast_k$

$$(A_k|\underline{b})_k = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ scegliamo $p_1 := 1 = a_{1,1} = 1°$ pivot

e $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II \mapsto II - kI} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \\ 0 & k+1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$p_2 := k+1$

$$\xrightarrow[III \mapsto III - II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+k & 1 & 1-k \\ 0 & 0 & -1 & k-1 \end{array}\right) = (T|\underline{c})_k$$

con $T_k := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+k & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ una matrice triangolare superiore

ORA (1.1) SE $k+1 \neq 0$, cioè $\forall\, k \neq -1$,

la matrice T_k è nonsingolare, quindi

$\circledast_k$ ha 1! soluzione; $\rightsquigarrow$ in particolare, si ha: $\forall k \neq -1$, il sistema $\circledast_k$ è

compatibile e l'insieme delle soluzioni

NON è una retta (è un solo punto!)

(1.2) <u>SE</u> $k+1=0$, cioè se $k=-1$,

allora si ha

$$\circledast_{k=-1} \rightsquigarrow (T|\underline{c})_{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{III \mapsto III - II}{\rightsquigarrow}$$

$$\underset{III \mapsto III - II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad rg\,(A_{-1}|\underline{b}_{-1}) = 2 = rg\,(A_{-1})$$

quindi il sistema è compatibili

& l'insieme delle soluzioni è un

sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ di dimensione

$$dim\,(\mathbb{R}^3) - rg\,(A_{-1}) = 3 - 2 = 1$$

cioè è una retta, che indichiamo

con ℓ_{-1}.

QUINDI, per rispondere ai vari quesiti,

si ha:

(a) $\circledast_k$ è compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$.

(b) l'insieme delle soluzioni di $\circledast_k$ è una retta – indicata con l_k – se e soltanto se $k=-1$.

(c) Per $k=-1$, troviamo equazioni parametriche e equazioni cartesiane di $l_{k=-1}$.

$\boxed{E.C.}$: la riduzione a scala di $\circledast_{-1}$

$$\circledast_{-1} \rightsquigarrow (T \mid \underline{c})_{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ci dà

$$\circledast_{-1} : \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{E.C.} : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$ sono possibili equazioni cartesiane per $l(-1)$

$\boxed{E.P.}$: dalla riduzione a scala

$$\circledast_{-1} \rightsquigarrow (T \mid \underline{c})_{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

otteniamo $\circledast_{-1}$ ando $\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases} \quad (x, y, z) \in \{(1+t, t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

cioè il sistema $\circledast_{-1}$ ha come insieme di soluzioni $\mathcal{S}_{-1} := \{(1+t, t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Ma tale $\mathcal{S}_{-1}$ è esattamente la retta l_{-1}, dunque l_{-1} ha E.P. (= equazioni parametriche)

$$(l_{-1})\ \underline{\text{E.P.}} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

(d) Per la retta l°_{-1} parallela a l_{-1} e passante per $P_0 := (1, 0, 0)$ le E.P. si ottengono da quelle di l_{-1} usando lo stesso vettore direttore $\vec{v}_{l_{-1}}$ e imponendo il passaggio per P_0, cioè

$$\underline{\text{E.P.}}\ (l^{\circ}_{-1}) : \begin{cases} x = v_x t + x_0 \\ y = v_y t + y_0 \\ z = v_z t + z_0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

dove $\quad (v_x, v_y, v_z) = \vec{v}_{l_{-1}} \equiv$ vettore direttore di l_{-1}

e $\quad (x_0, y_0, z_0) = P_0 = (1, 0, 0)$

<u>M1</u> $\quad \underline{E.P.}(l_{-1}) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = \quad 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\vec{v}_{l_{-1}} = (1, 1, 0)$

$\Downarrow$

da cui troviamo

$$\boxed{\underline{E.P.}\,(l_{-1}^{0}) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad (\forall\, t \in \mathbb{R})}$$

CONTINUA

$\boxed{2}$

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q}) \; , \qquad \underline{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3$$

(a) Dimostrare che A è invertibile

(b) Calcolare A^{-1}

(c) Determinare se A^2 sia invertibile, e se lo è, calcolarne l'inversa $(A^2)^{-1}$

(d) Determinare se $\exists\ \underline{x} \in \mathbb{Q}^3 : A\underline{x} = \underline{b}$ e se $\exists$ calcolarlo.

Svolgimento:

Affrontiamo i punti (a), (b), (d) tutti insieme! INFATTI

A^{-1}, se esiste, è fatta da tre colonne

$A^{-1} = (X^1 / X^2 / X^3)$ tali che

X^j è soluzione del sistema $A \cdot X = \underline{e}_j$

dove $\underline{e}_j = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow j$ è il j-esimo vettore della base canonica.

Allora, trovare A^{-1} – se $\exists$ – e un $\underline{x}$ come richiesto in (d) equivale a risolvere quattro sistemi simultanei, con matrice dei coefficienti A e vettori dei termini noti $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ e $\underline{b}$; perciò lavoriamo sulla "matrice completa" dei quattro sistemi simultanei, riducendo A a scala, come segue:

$$\left(A \mid \underline{e}_1 \mid \underline{e}_2 \mid \underline{e}_3 \mid \underline{b} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 4 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrows \quad (p_1 := a_{1,2} = 1)$$

$$\leftrightarrows \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -7 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 2 \cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 4\mathrm{I}}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -11 & -11 & 1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 2 & 1 & -6 \end{array}\right) \leftrightarrows \quad (p_2 := a'_{2,3} = 1)$$

$$\leftrightarrows \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & -11 & -11 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + 11 \cdot \mathrm{II}]{}$$

$$\longmapsto \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 66 & 1 & 18 & 11 & -59 \end{array}\right.}_{t}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}}\right) =: \odot$$

forma triangolare, con termini diagonali ($p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 66$) tutti diversi da 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A è NONsingolare $\Rightarrow$ A è invertibile (ok)

QUINDI $\exists!\, \underline{x} \in \mathbb{Q}^3 : A\underline{x} = \underline{b}$, dato da

$\circledast$ $\underline{x} = A^{-1} \cdot \underline{b}$

PROSEGUENDO coi calcoli, da $\odot$ troviamo, tramite eliminazione di Gauss all'indietro,

$$\odot := \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 66 & 1 & 18 & 11 & -59 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 7/66 \cdot \mathrm{III} \ \circledast]{\mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} - 3/66 \cdot \mathrm{III} \ \circledast}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1/22 & 2/11 & -1/2 & 111/66 \\ 0 & 1 & 0 & -7/66 & 1/11 & -1/6 & 17/66 \\ 0 & 0 & 66 & 1 & 18 & 11 & -59 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} - \mathrm{II}}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 2/33 & 1/11 & -1/3 & 94/66 \\ 0 & 1 & 0 & -7/66 & 1/11 & -1/6 & 17/66 \\ 0 & 0 & 66 & 1 & 18 & 11 & -59 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto 66^{-1} \cdot \mathrm{III}]{}$$

$\circledast$ $-10 - \frac{3}{66} \cdot (-264) = -10 - 3 \cdot (-4) = -10 + 12 = 2$

$\circledast$ $-29 - \frac{7}{66} \cdot (-264) = -29 - 7 \cdot (-4) = -29 + 28 = -1$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 2/33 & 1/11 & -1/3 & 94/66 \\ 0 & 1 & 0 & -7/66 & 1/11 & -1/6 & 17/66 \\ 0 & 0 & 1 & 1/66 & 3/11 & 1/6 & -59/66 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/33 & 1/11 & -1/3 \\ -7/66 & 1/11 & -1/6 \\ 1/66 & 3/11 & 1/6 \end{pmatrix}$$

l'! $\underline{x}$ che è soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$

$$= \frac{1}{66} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & -22 \\ -7 & 6 & -11 \\ 1 & 18 & 11 \end{pmatrix}$$

QUINDI

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/33 & 1/11 & -1/3 \\ -7/66 & 1/11 & -1/6 \\ 1/66 & 3/11 & 1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{66} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & -22 \\ -7 & 6 & -11 \\ 1 & 18 & 11 \end{pmatrix}}$$

è l'inversa di A

& $\boxed{\underline{x} = \begin{pmatrix} 94/66 \\ 17/66 \\ -59/66 \end{pmatrix} \text{ è l'! soluzione del sistema lineare } A\underline{x} = \underline{b}}$

VERIFICA INCROCIATA:

$A\underline{x} = \underline{b} \iff \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$, e dal calcolo si ha

$$A^{-1}\underline{b} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -22 \\ -7 & 6 & -11 \\ 1 & 18 & 11 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{66} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94/66 \\ 17/66 \\ -59/66 \end{pmatrix} = \underline{x}, \text{ q.e.d.}$$

METODO ALTERNATIVO: ricordiamo che

A è invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

e allora A^{-1} è data da (CRAMER)

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a'_{ij} := \det(A_{ji})(-1)^{i+j} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;} \qquad (\star)$$

cioè il coefficiente (i,j)-esimo di A^{-1} è

$(-1)^{i+j} \det(A)^{-1} \cdot \det(A_{ji})$, dove

$A_{j,i}$:= matrice ottenuta da A cancellando la riga j e la colonna i

Nel nostro caso si ha

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{1,1}) = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 = 4$$

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{1,2}) = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 = 7$$

$$A_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{1,3}) = 1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 = 1$$

$$A_{2,1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{2,1}) = -7 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = -6$$

$$A_{2,2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{2,2}) = 4 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 6$$

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{2,3}) = 4\cdot(-1) - (-2)\cdot(-7) = -18$$

$$A_{3,1} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{3,1}) = -7\cdot 3 - 1\cdot 1 = -22$$

$$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{3,2}) = 4\cdot 3 - 1\cdot 1 = 11$$

$$A_{3,3} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{3,3}) = 4\cdot 1 - (-7)\cdot 1 = 11$$

QUINDI la formula (✱) di pagina 11 dà

$$A^{-1} = 66^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & -22 \\ -7 & 6 & -11 \\ 1 & 18 & 11 \end{pmatrix}$$

perché $\det(A) = 66$ per la triangolarizzazione fatta alle pagine 8 e 9, cioè

$$A \rightsquigarrow T := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 66 \end{pmatrix}$$ con 2 scambi di righe

per cui $\boxed{\det(A)} = (-1)^2 \cdot \det(T) =$

$= \det(T) = 1\cdot 1\cdot 66 = \boxed{66}$ OK

OPPURE calcolando $\det(A)$ con la formula di Sarrus

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 4 & 6 & -22 \\ -7 & 6 & -11 \\ 1 & 18 & 11 \end{pmatrix} =$$

$= 4\cdot 6\cdot 11 + 6\cdot(-11)\cdot 1 + (-7)\cdot 18\cdot(-22) -$
$- 1\cdot 6\cdot(-22) - 4\cdot 18\cdot(-11) - 6\cdot(-7)\cdot 11 = 66$ OK

IN CONCLUSIONE:

(a) A è invertibile, perché

- i suoi pivot (1, 1, 66) sono tutti diversi da 0

oppure perché

- $\det(A) = 66 \neq 0$

(b) $$A^{-1} = \frac{1}{66} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 & -22 \\ -7 & 6 & -11 \\ 1 & 18 & 11 \end{pmatrix}$$

(d) $\exists !\ \underline{x} \in \mathbb{Q}^3$ tale che $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$,

dato da $$\underline{x} = \begin{pmatrix} 94/66 \\ 17/66 \\ -59/66 \end{pmatrix}$$

(c) In generale, si ha

A è invertibile $\Longleftrightarrow$ A^n è invertibile $\forall n \in \mathbb{N}$

perché

SE $\exists A^{-1}$, $\Rightarrow$ $\exists (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

&

SE $\exists (A^n)^{-1}$, $\Rightarrow$ $\exists A^{-1} = A^{n-1}(A^n)^{-1} =$

$= (A^n)^{-1} \cdot A^{n-1}$

Allora, siccome da (a) sappiamo che A è invertibile, segue che anche A^2 è invertibile, con $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$

ALTERNATIVAMENTE, per (a) e (c):

Ricordiamo che $\forall$ matrice quadrata M si ha

$$\boxed{\exists\, M^{-1} \iff \det(M) \neq 0}$$

ORA $\boxed{\det(A) = 66 \neq 0}$

perché
$$A := \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{con 2 scambi di righe}]{\text{ELIM. GAUSS}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 66 \end{pmatrix}}_{\text{triangolare superiore}}$$

quindi $\det(A) = (-1)^2 \cdot \det(S) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 66 = 66$

oppure, calcolando $\det(A)$ con la formula di Sarrus,

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4\cdot 1\cdot 1 + (-7)\cdot 3\cdot(-2) + 1\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot(-2) - 4\cdot 3\cdot(-1) - 1\cdot(-7)\cdot 1 =$$
$$= 4 + 42 - 1 + 2 + 12 + 7 = 66$$

QUINDI $\det(A) = 66 \neq 0 \Rightarrow A$ è invertibile $\Rightarrow$ (a) ok

POI il teorema di Binet per due matrici quadrate $R, S \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ dà

$$\det(R \cdot S) = \det(R) \cdot \det(S)$$

in particolare $(R = S = A)$ segue che

$$\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A)^2$$

ora $\det(A) = 66 \neq 0 \Rightarrow \det(A^2) \neq 0$

perciò anche A^2 è invertibile $\Rightarrow$ (c) ok

$\boxed{3}$ Data $M := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{4\times 3}(\mathbb{Q})$

(a) determinare il rango di M,

(b) determinare una base di $\mathrm{Im}(M)$,

(c) determinare una base di $\mathrm{Ker}(M)$.

Svolgimento:

(a) Riduciamo M a scala come segue:

$$M := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\overline{III} \mapsto \overline{III} + 2\cdot\overline{I} \\ \overline{IV} \mapsto \overline{IV} - 3\cdot\overline{I}}]{\substack{(p_1 = 1) \\ \overline{II} \mapsto \overline{II} - 2\cdot\overline{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\xrightarrow[\substack{\overline{IV} \mapsto \overline{IV} - 2\cdot\overline{II} \\ (p_2 = -2)}]{\overline{III} \mapsto \overline{III} + \overline{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S \text{ (a scala!) ha 2 pivot} \implies \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(S) = 2$$

QUINDI $\boxed{\mathrm{rg}(M) = 2}$

(b) Nella matrice S, che è una riduzione a scala di M, i 2 pivot stanno nella 1^a e 2^a colonna $\implies$ per teoria generale, $\mathrm{Im}(M)$ ha per base $\{M^1, M^2\}$, con $M^j :=$ j^a colonna di M

CIOÈ $\left\{ M^1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; M^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

è una base di $\mathrm{Im}(M)$

(e) $\mathrm{Ker}(M) = \{ \underline{x} \in \mathbb{Q}^3 \mid M\underline{x} = \underline{0} \}$

quindi $\mathrm{Ker}(M)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$M\underline{x} = \underline{0}$ $\leadsto$ lo risolviamo tramite riduzione a scala, data dai calcoli fatti per (a); QUINDI è

$$M\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underbrace{S\underline{x} = \underline{0}}$$

CIOÈ

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

CIOÈ

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{Q}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

c) una base di $Ker(M)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{4}$ Data $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$

(a) Determinare tutti gli autovalori di A.

(b) Descrivere gli autospazi di A, tramite equazioni parametriche.

(c) Determinare equazioni cartesiane esplicite di ciascun autospazio di A

(d) Determinare se A sia diagonalizzabile, e in caso affermativo calcolare una base esplicita di autovettori per $V := \mathbb{R}^4$.

Svolgimento:

(a) Gli autovalori di A sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione caratteristica
$p_A(x) = 0$ dove $p_A(x) := \det(A - x \cdot I_4)$
QUINDI cominciamo calcolando $p_A(x)$: si ha

$$\boxed{p_A(x)} := \det(A - x\cdot I_4) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2-x & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix} =$$ sviluppo di Laplace 1^a riga

$$= +(1-x)\cdot\det\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix} =$$ determinante di matrice triangolare

$$= (1-x)\cdot\left((1-x)\cdot(2-x)\cdot(2-x)\right) = \boxed{(1-x)^2\cdot(2-x)^2}$$

QUINDI l'equazione da risolvere è

$$\boxed{(1-x)^2\cdot(2-x)^2 = 0}$$

le cui soluzioni sono $\boxed{\lambda_1 = 1 \;\text{ e }\; \lambda_2 = 2;}$

$\leadsto$ gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$.

(b+c) Gli autospazi di A sono

$$V_\lambda := \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid Av = \lambda v \}$$

per i vari autovalori λ di A; da (b) sappiamo che $\lambda \in \{1, 2\}$, quindi gli autospazi sono

$$V_1 = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid Av = v \} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (A - I_4)\underline{x} = \underline{0} \}$$

& $$V_2 = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid Av = 2v \} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (A - 2I_4)\underline{x} = \underline{0} \}$$

Per calcolarli esplicitamente, dobbiamo risolvere i relativi sistemi lineari omogenei:

$\boxed{V_1} \to (A - I_4)\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xmapsto{II \mapsto II - \frac{2}{3} I}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_1$$ matrice a scala con 2 pivot

$\leadsto rg(A - I_4) = rg(S_1) = 2 \Rightarrow$

Teorema della Dimensione

$$\Rightarrow dim(V_1) = dim(Ker(A - I_4)) =$$

$$= dim(\mathbb{R}^4) - dim(Im(A - I_4)) =$$

$$= 4 - rg(A - I_4) = 4 - 2 = 2$$

cioè $\boxed{dim(V_1) = 2}$

Inoltre, il calcolo esplicito ci dà

$$V_1 := \underbrace{\ker(A - I_4)} = \underbrace{\ker(S_1)}$$

CIOÈ

$$(A - I_4)\,\underline{x} = \underline{0} \iff S_1 \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

e scrivendo $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ si ha

$$S_1 \cdot \underline{x} = \underline{0} \implies \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} -3x + z + u = 0 \\ -\frac{2}{3} z + \frac{1}{3} u = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -3x + z + u = 0 \\ -2z + u = 0 \end{cases} \implies$$

EQUAZIONI CARTESIANE di V_1

$$\implies \begin{cases} z = 3x - u \\ u = 2z \end{cases} \implies \begin{cases} z = 3x - 2z \\ u = 2z \end{cases} \implies \begin{cases} 3z = 3x \\ u = 2z \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} z = x \\ u = 2x \end{cases} \implies \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x - u = 0 \end{cases}$$

(altre) equazioni cartesiane di V_1 ((più "semplici"))

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = l \\ z = t \\ u = 2t \end{cases} \quad (\forall\, t, l \in \mathbb{R})$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE di V_1

$\boxed{\text{NOTA:}}$ le equazioni parametriche trovate per V_1 hanno $\underline{2}$ parametri, com'è giusto che sia perché $\dim(V_1) = 2$.

Riscrivendole abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ l \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui vediamo che una base di V_1 è data dai 2 autovettori (di autovalore 1)

$$\left\{ v_1^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; v_2^1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{V_2} \to (A - 2 \cdot I_4)\, \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III \mapsto III - 3 \cdot I \\ IV \mapsto IV - 2 \cdot I}]{\substack{p_1 := -1 \\ II \mapsto II}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S_2$$

dove S_2 è matrice a scala con 3 pivot, quindi

$rg(A - 2 \cdot I_4) = rg(S_2) = 2$ ← come prima per V_1

& $\dim(V_2) = \dim(\mathbb{R}^4) - rg(A - 2 \cdot I_4) = 4 - 3 = 1$

cioè $\boxed{\dim(V_2) = 1}$

Il calcolo esplicito ci dà

$$V_2 := \underbrace{\mathrm{Ker}(A - 2 \cdot I_4)}_{} = \underbrace{\mathrm{Ker}(S_2)}_{}$$

CIOÈ

$$(A - 2I_4)\,\underline{x} = \underline{0} \iff S_2 \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

che esplicitamente diventa

$$S_2 \cdot \underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ -y = 0 \\ u = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ u = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI CARTESIANE di V_2

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \\ u = 0 \end{cases} \quad (\forall\, t \in \mathbb{R})$$

EQUAZIONI PARAMETRICHE di V_2

$\boxed{\text{NOTA:}}$ qui c'è 1! parametro, com'è giusto che sia perché $\dim(V_2) = 1$.

INOLTRE, sempre dalle equazioni parametriche si ha che $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$

QUINDI una base di V_2 è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(d) La teoria generale ci dice che

$$A \text{ è diagonalizzabile} \quad (\forall A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}))$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{\lambda \text{ autovalore di } A} \dim(V_\lambda) = n$$

Nel caso in esame si ha $n = 4$ e gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, e la somma in esame è

$$\dim(V_1) + \dim(V_2) = 2 + 1 = 3 \neq 4$$

QUINDI concludiamo che

$$\boxed{A \ \underline{\text{non}} \text{ è diagonalizzabile.}}$$