CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2023–2024

Esame scritto del 24 Giugno 2024 — Sessione Estiva, I appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

……… $*$ ………

[1] — Si consideri il sistema di tre equazioni in tre variabili $x, y, z \in \mathbb{R}$, e dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, dato da

$$\circledast_k \, : \, \begin{cases} x - y = 1 \\ k\,x + y + z = 1 \\ (k+1)\,y = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema sia compatibile (cioè ammetta almeno una soluzione).

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni è una retta — in seguito indicata con ℓ_k — in $\mathbb{R}^3$.

(c) Per tutti i valori di k di cui al punto *(b)*, si esprima l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast_k$ — cioè la retta ℓ_k — tramite equazioni parametriche e tramite equazioni cartesiane.

(d) Per tutti i valori di k di cui al punto *(b)*, si determinino equazioni parametriche della retta passante per il punto $P_0 := (1,0,0)$ e parallela alla retta ℓ_k.

[2] — Si considerino la matrice $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ e il vettore $\underline{b} \in \mathbb{Q}^3$ definiti da

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \underline{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(a) Dimostrare che la matrice A è invertibile.

(b) Calcolare la matrice A^{-1} inversa di A.

(c) Determinare se la matrice A^2 sia invertibile oppure no.

(d) Determinare se esista un $\underline{x} \in \mathbb{Q}^3$ tale che $A\,\underline{x} = \underline{b}$. In caso negativo, si giustifichi perché un tale $\underline{x}$ non esista; in caso positivo, si determini esplicitamente un tale $\underline{x}$.

[3] — Si consideri la matrice $M := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 3}(\mathbb{Q})$.

(a) Determinare il rango di M .

(b) Determinare una base del sottospazio vettoriale $Im\,(M)$ di $W := \mathbb{Q}^4$.

(c) Determinare una base del sottospazio vettoriale $Ker\,(M)$ di $V := \mathbb{Q}^3$.

[4] — Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

(a) Determinare tutti gli autovalori di A .

(b) Descrivere esplicitamente gli autospazi di A , tramite equazioni parametriche.

(c) Determinare equazioni cartesiane (esplicite) di ciascun autospazio di A .

(d) Determinare se la matrice A sia diagonalizzabile oppure no; inoltre,

(d.-) nel caso in cui la matrice A non sia diagonalizzabile, se ne spieghi esplicitamente la ragione;

(d.+) nel caso in cui la matrice A sia diagonalizzabile, si calcoli esplicitamente una base di autovettori di A per lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$.