

CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018–2019

Esame scritto del 20 Settembre 2019 — Sessione Autunnale, I appello

Testo & Svolgimento

..... *

[1] — Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$ e la funzione lineare ad essa associata

$$L_A : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3, \quad \underline{x} \mapsto L_A(\underline{x}) := A \underline{x} \quad \forall \underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3.$$

- (a) Calcolare gli autovalori di L_A .
- (b) Calcolare gli autospazi di L_A .
- (c) Determinare se L_A sia diagonalizzabile oppure no. In caso negativo, si giustifichi il perché; in caso positivo, si determini una base esplicita di autovettori.
- (d) Dato $\underline{v} := \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcolare esplicitamente l'immagine $L_A^n(\underline{v})$ per ogni $n \in \mathbb{N}_+$.

[2] — Nello spazio affine reale tridimensionale $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^3$ si considerino i tre punti $A := (1, 0, 1)$, $B := (3, 1, 1)$, $C := (0, 1, -2)$, la retta r passante per i due punti A e B , la retta s di equazioni cartesiane $s : \begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ y + z = 1 \end{cases}$, e il piano π passante per il punto C e parallelo alle due rette r ed s .

- (a) Determinare equazioni parametriche della retta r .
- (b) Determinare equazioni parametriche del piano π .
- (c) Determinare equazioni cartesiane del piano π .
- (d) Determinare la mutua posizione delle due rette r ed s — cioè se siano tra loro coincidenti, o parallele, o sghembe.

[3] — Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Determinare se A sia invertibile oppure no. In caso positivo, calcolare esplicitamente la matrice inversa A^{-1} ; in caso negativo, calcolare esplicitamente il rango $\text{rg}(A)$.

(b) Risolvere il sistema lineare $A \underline{x} = \underline{b}$ con $\underline{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Determinare — giustificando opportunamente la conclusione — se la matrice A^3 sia invertibile oppure no.

[4] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^3$ di dimensione 3 su $\mathbb{Q}$, si considerino i quattro vettori (dipendenti dal parametro $t \in \mathbb{Q}$)

$$\underline{u}(t) := \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 2+2t \end{pmatrix}, \quad \underline{v}(t) := \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1+2t \end{pmatrix}, \quad \underline{w}(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}(t) := \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare $\dim(\text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t)))$, per ogni $t \in \mathbb{Q}$.

(b) Determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{Q}$ tali che $\underline{x}(t) \in \text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t))$.

— ★ —

SVOLGIMENTO

N.B.: lo svolgimento qui presentato è molto lungo... Questo non significa che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si approfitta per spiegare — in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con molti particolari tutti gli aspetti della teoria toccati più o meno a fondo dal testo in questione.

[1] — Rispondiamo ai diversi quesiti uno a uno, osservando preliminarmente che autovalori, autovettori e autospazi di L_A non sono altro che autovalori, autovettori e autospazi della matrice A .

(a) Ricordiamo che gli autovalori di A — e dunque di L_A , per quanto già osservato — sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico di A ; quest'ultimo è dato, per definizione, da

$$\begin{aligned}
P_A(x) &:= \det(A - x I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = -x \cdot \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = \\
&= -x ((1-x)^2 - 1 \cdot 1) = -x (x^2 - 2x) = -x^2 (x - 2)
\end{aligned}$$

così che

$$P_A(x) := -x^2 (x - 2) \quad (1)$$

e quindi gli autovalori cercati sono 0 e 2.

Si noti che il fatto che 0 sia un autovalore si può dedurre subito dal fatto che per la matrice A si ha $\det(A) = 0$ — in quanto A ha una riga formata tutta di zeri, oppure per il fatto che A ha due righe uguali — il che significa esattamente che $P_A(0) = 0$ e quindi $x = 0$ è una radice di $P_A(x)$, dunque un autovalore di A .

(b) Dato che gli autovalori di A sono 0 e 2 dobbiamo ora calcolare i relativi autospazi V_0 e V_2 — dove $V := \mathbb{Q}^3$ — dove $V_\lambda := \text{Ker}(A - \lambda I_3)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo con $(A - \lambda I_3)$ come matrice dei coefficienti, per $\lambda \in \{0, 2\}$.

Nel caso di $\lambda = 0$, riducendo a scala la matrice $(A - 0 I_3) = A$ troviamo

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a \text{ r.} \mapsto 3^a \text{ r.} - 1^a \text{ r.}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{(0)}$$

dove l'ultima matrice $S_{(0)}$ è a scala, e ha lo stesso nucleo di A , che ora è descritto come insieme delle soluzioni dell'unica equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Allora

$$V_0 = \text{Ker}(A) = \text{Ker}(S_{(0)}) = \{ (r, s, -r - s) \mid r, s \in \mathbb{Q} \} \quad (2)$$

Nel caso di $\lambda = 2$, riducendo a scala la matrice $(A - 2 I_3)$ troviamo

$$\begin{aligned}
A - 2 I_3 &:= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a \text{ r.} \mapsto 3^a \text{ r.} + 1^a \text{ r.}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a \text{ r.} \mapsto 3^a \text{ r.} + 2^a \text{ r.}} \\
&\xrightarrow{3^a \text{ r.} \mapsto 3^a \text{ r.} + 2^a \text{ r.}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S_{(2)}
\end{aligned}$$

dove l'ultima matrice $S_{(2)}$ è a scala, e ha lo stesso nucleo di A , descritto come insieme delle soluzioni del sistema omogeneo con $S_{(2)}$ come matrice dei coefficienti, che si riduce a

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = t \\ z = x \\ y = 0 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{Q})$$

per cui in conclusione abbiamo

$$V_2 = \text{Ker}(A - 2 I_3) = \text{Ker}(S_{(2)}) = \{ (t, 0, t) \mid t \in \mathbb{Q} \} \quad (3)$$

(c) Dalla (2) deduciamo in particolare che l'autovalore 0 ha molteplicità geometrica $m_G(0) := \dim(V_0) = 2$, e analogamente dalla (3) otteniamo che la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è $m_G(2) := \dim(V_2) = 1$. Allora abbiamo

$$m_G(0) + m_G(2) = 3 = \dim(V)$$

quindi possiamo concludere che L_A è diagonalizzabile. Una base di autovettori si ottiene come unione di una base dell'autospazio V_0 — composta da due autovettori di autovalore 0 linearmente indipendenti tra loro — con una base dell'autospazio V_2 — composta da un singolo autovettore di autovalore 2. Per V_0 osserviamo dalla (2) che una possibile base è data da $B_0 := \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ — corrispondente alle due scelte di valori dei parametri $(r, s) := (1, 0)$ e $(r, s) := (0, 1)$ — e per V_2 osserviamo dalla (3) che una possibile base è data da $B_2 := \{(1, 0, 1)\}$ — corrispondente alla scelta dei parametri $t := 1$. Unendo tali basi otteniamo la base

$$B_D := B_0 \cup B_2 = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$$

che è una base di autovettori (dunque una base *diagonalizzante*), come richiesto.

(d) Dalle definizioni segue subito che

$$L_A^n(\underline{v}) = A^n \underline{v} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}_+ \quad (4)$$

Ora, per le potenze A^n della matrice n il calcolo esplicito ci dà

$$A^1 := A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

e poi a seguire, iterando (e quindi per induzione), troviamo che

$$A^n := \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}_+ \quad (6)$$

Infatti, la base dell'induzione — cioè il caso $n = 1$ — è dimostrata da (5), mentre il passo induttivo — che dimostra il caso $n + 1$ (*"Tesi Induttiva"*) assumendo che sia vero il caso n (*"Ipotesi Induttiva"*) — è dimostrato dal calcolo esplicito

$$A^{n+1} = A A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n & 2^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^n & 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

Infine, dalla (4) e dalla (6) il calcolo diretto ci dà, per ogni $n \in \mathbb{N}_+$,

$$L_A^n(\underline{v}) = A^n \underline{v} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1}(7 - 1 + 3) \\ 0 \\ 2^{n-1}(7 - 1 + 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} \cdot 9 \\ 0 \\ 2^{n-1} \cdot 9 \end{pmatrix}$$

[2] — Affrontiamo i diversi quesiti uno alla volta.

(a) La retta r passante per i due punti A e B può essere descritta come la retta passante per il punto A e avente vettore direttore

$$\underline{v}_r = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 1, 1) - (1, 0, 1) = (2, 1, 0) \quad (7)$$

perciò la sua equazione vettoriale $r : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \underline{v}_r \ (\forall t \in \mathbb{R})$ dà equazioni parametriche della forma

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad (8)$$

(b) Il piano π passante per il punto C e parallelo alle due rette r ed s può essere descritto tramite un'equazione vettoriale della forma

$$\pi : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + h \underline{v}_r + k \underline{v}_s \ (\forall h, k \in \mathbb{R}) \quad (9)$$

in cui $\underline{v}_r$ e $\underline{v}_s$ siano rispettivamente un vettore direttore della retta r e uno della retta s : nel primo caso possiamo prendere $\underline{v}_r$ come in (7), nel secondo caso invece dobbiamo calcolare un opportuno vettore $\underline{v}_s$. A tal fine, otteniamo equazioni parametriche della retta s dalle equazioni cartesiane date, semplicemente risolvendo il sistema lineare che esse rappresentano. I calcoli espliciti ci danno

$$s : \begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ y + z = 1 \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 4 + 3y - z \\ y = 1 - z \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = 7 - 4t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

dove l'ultima espressione ottenuta a destra ci dà proprio equazioni parametriche di s come richiesto: da queste leggiamo che $\underline{v}_s = (-4, -1, 1)$ è un possibile vettore direttore della retta s . Con quest'ultimo e con il vettore $\underline{v}_r$ in (7) possiamo ottenere dall'equazione vettoriale in (9) le equazioni parametriche

$$\pi : \begin{cases} x = 2h - 4k \\ y = 1 + h - k \\ z = -2 + k \end{cases} \quad (\forall h, k \in \mathbb{R}) \quad (10)$$

(c) Cerchiamo ora equazioni cartesiane del piano π , ricavandole dalle equazioni parametriche in (10). A tal fine, bisogna dedurre da queste ultime un sistema di equazioni lineari nelle variabili x, y, z , eliminandone i due parametri h e k .

Ricordiamo il metodo “standard” che si può seguire in questi casi. Dato un sottospazio affine $\mathcal{S}$ in $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$ descritto da equazioni parametriche, queste ultime si possono scrivere (in “modalità compatta”) nella forma matriciale

$$\mathcal{S} : \underline{x} = \underline{x}_0 + A \underline{t} \quad (\forall \underline{t} \in \mathbb{K}^d) \quad (11)$$

dove $\underline{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ indica la stringa delle coordinate di un punto nello spazio affine n -dimensionale $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$, con $\underline{t} := (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{K}^d$ indichiamo la stringa dei d parametri (indipendenti) coinvolti nelle equazioni parametriche, e $d := \dim(\mathcal{S})$, la $A \in \text{Mat}_{d \times n}(\mathbb{K})$ è una matrice $d \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$, e infine $\underline{x}_0 \in \mathbb{K}^n$ è il punto di $\mathcal{S}$ che si ottiene dalla (11) per $\underline{t} = \underline{0}$. Si noti che nel caso in esame abbiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $d = 2$.

Il significato delle equazioni parametriche in (11) è che $\mathcal{S}$ è il sottoinsieme dei punti $\underline{x}$ in $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$ dati dalla (11) al variare di $\underline{t} \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^d$: dunque per ogni $\underline{x} \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$ abbiamo

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \exists \underline{t} \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^d : \underline{x} = \underline{x}_0 + A \underline{t}$$

e riformulando l'ultima condizione otteniamo

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \exists \text{ una soluzione del sistema lineare (in } t_1, \dots, t_d) \text{ } \otimes_x : A \underline{t} = \underline{x} - \underline{x}_0 \quad (12)$$

Ora, sappiamo che un sistema lineare ha soluzioni se e soltanto se il rango della sua matrice dei coefficienti è uguale al rango della sua matrice completa: perciò la (12) ci dà

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A | \underline{x} - \underline{x}_0) \quad (13)$$

Ora, operando sulla matrice completa $(A | \underline{x} - \underline{x}_0)$ per ridurne a scala la parte di sinistra — cioè la A — si ottiene una matrice della forma $(S | \underline{f}(\underline{x} - \underline{x}_0))$ dove S è una riduzione a scala di A e $\underline{f}(\underline{x} - \underline{x}_0)$ indica una colonna di n equazioni lineari in $\underline{x} - \underline{x}_0$, diciamo $f_1(\underline{x} - \underline{x}_0), \dots, f_n(\underline{x} - \underline{x}_0)$. Allora avremo

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A | \underline{x} - \underline{x}_0) \iff \odot_{\mathcal{S}} : \begin{cases} f_i(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \\ \forall i = n - \text{rg}(A) + 1, \dots, n; \end{cases}$$

e quindi in conclusione la (13) diventa

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \odot_{\mathcal{S}} : \begin{cases} f_i(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \\ \forall i = n - \text{rg}(A) + 1, \dots, n; \end{cases} \quad (14)$$

così che il sistema $\odot_{\mathcal{S}} : \begin{cases} f_i(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \\ \forall i = n - \text{rg}(A) + 1, \dots, n; \end{cases}$ ci dà equazioni cartesiane per $\mathcal{S}$.

Applichiamo dunque tutto questo al caso di $\mathcal{S} := \pi$: come equazioni parametriche (11) abbiamo ora le (10), così la matrice completa $(A | \underline{x} - \underline{x}_0)$ che compare in (13) è

$$(A | \underline{x} - \underline{x}_0) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & x \\ 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z+2 \end{array} \right)$$

di cui ora riduciamo a scala la parte di sinistra, come segue:

$$\begin{aligned} (A | \underline{x} - \underline{x}_0) &= \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & x \\ 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z+2 \end{array} \right) \xrightarrow[2^a \text{ r.} \mapsto 1^a \text{ r.}]{1^a \text{ r.} \mapsto 2^a \text{ r.}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y-1 \\ 2 & -4 & x \\ 0 & 1 & z+2 \end{array} \right) \xrightarrow{2^a \text{ r.} \mapsto 2^a \text{ r.} - 2 \cdot 1^a \text{ r.}} \\ &\xrightarrow{2^a \text{ r.} \mapsto 2^a \text{ r.} - 2 \cdot 1^a \text{ r.}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y-1 \\ 0 & -2 & x-2y+2 \\ 0 & 1 & z+2 \end{array} \right) \xrightarrow[3^a \text{ r.} \mapsto 2^a \text{ r.}]{2^a \text{ r.} \mapsto 3^a \text{ r.}} \\ &\xrightarrow[3^a \text{ r.} \mapsto 2^a \text{ r.}]{2^a \text{ r.} \mapsto 3^a \text{ r.}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z+2 \\ 0 & -2 & x-2y+2 \end{array} \right) \xrightarrow{3^a \mapsto 3^a + 2 \cdot 2^a} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y-1 \\ 0 & 1 & z+2 \\ 0 & 0 & x-2y+2z+6 \end{array} \right) \end{aligned}$$

e da questo otteniamo che le equazioni cartesiane per π come in (14) — di fatto, *una* singola equazione... — sono

$$\odot_{\pi} : x - 2y + 2z + 6 = 0 \quad (15)$$

(d) Per determinare la mutua posizione delle rette r ed s cominciamo osservando che esse *non* sono prallele, in quanto i loro vettori direttori $\underline{v}_r$ e $\underline{v}_s$ che abbiamo determinato in precedenza non sono linearmente dipendenti (che è la condizione necessaria e sufficiente affinché le due rette siano parallele): infatti abbiamo

$$\underline{v}_r = (2, 1, 0) \quad , \quad \underline{v}_s = (-4, -1, 1)$$

e questi due vettori sono linearmente indipendenti perché

$$\text{rg} \left(\begin{array}{c} \underline{v}_r \\ \underline{v}_s \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{array} \right) = 2$$

come si può vedere ad esempio osservando che il minore 2×2 formato dagli elementi nelle ultime due colonne, cioè $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, ha determinante diverso da zero — precisamente, è pari a 1.

A questo punto le rette r ed s , essendo *non parallele*, potrebbero essere *complanari incidenti* oppure *sghembe*: precisamente, avremo

$$\begin{array}{ll} r \text{ ed } s \text{ sono incidenti} & \Longleftrightarrow r \cap s \neq \emptyset \\ r \text{ ed } s \text{ sono sghembe} & \Longleftrightarrow r \cap s = \emptyset \end{array} \quad (16)$$

perciò andiamo a studiare l'intersezione $r \cap s$. Osserviamo che per ogni $P \in \mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\begin{aligned} P \in r \cap s & \Longleftrightarrow (P \in r) \& (P \in s) \Longleftrightarrow \\ & \Longleftrightarrow \left(\exists t \in \mathbb{R} : P = (1 - 2t, -t, 1) \right) \& \left\{ \begin{array}{l} (1 - 2t) - 3(-t) + 1 = 4 \\ (-t) + 1 = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

— dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato le equazioni parametriche (8) di r e le equazioni cartesiane di s date in partenza. Nell'ultima caratterizzazione il sistema di equazioni per t si risolve come segue

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - 2t) - 3(-t) + 1 = 4 \\ (-t) + 1 = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = 2 \\ t = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \nexists t$$

quindi concludiamo che *non esiste nessun* $P \in r \cap s$, cioè $r \cap s = \emptyset$: in forza di (16), questo significa esattamente che *le rette r ed s sono tra loro sghembe*.

[3] — I diversi quesiti sono tra loro collegati, in particolare in vari casi si può sfruttare uno dei risultati parziali per ottenerne un altro, oppure si possono trattare più quesiti simultaneamente. Anche l'ordine in cui affrontiamo i vari punti può cambiare, seguendo strategie diverse. Nel seguito presentiamo diversi possibili metodi di risoluzione.

(a)-(b) — Primo metodo: Ricordiamo che una matrice $n \times n$ è invertibile se e soltanto se esiste una matrice X della stessa taglia tale che $AX = I_n$. Se “tagliamo” la matrice incognita X in colonne, cioè la leggiamo come $X = (X^1 | \dots | X^n)$, e analogamente facciamo con la matrice identità $I_n = (\underline{e}_1 | \dots | \underline{e}_n)$ — dove ciascun $\underline{e}_i := (\underbrace{\dots}_{i-1}, 0, 1, \underbrace{0, \dots}_{n-i})$ è l' i -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3$ — l'equazione matriciale $AX = I_n$ è equivalente a n sistemi lineari simultanei in n incognite, con matrice (in comune) dei coefficienti A e con vettori dei termini noti $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$. Trovare la matrice inversa — se esiste! — $X = A^{-1}$ che è soluzione del nostro problema equivale quindi a risolvere i suddetti n sistemi simultanei.

D'altra parte, anche al punto (b) si richiede di risolvere un sistema che ha ancora A come matrice dei coefficienti. Quindi complessivamente dobbiamo risolvere $(n+1)$ sistemi simultanei con matrice A , le cui $(n+1)$ colonne dei termini noti complessivamente formano la matrice $n \times (n+1)$ data da $(I_n | \underline{b}) = (\underline{e}_1 | \dots | \underline{e}_n | \underline{b})$. Ciascuno di tali sistemi può essere risolto operando sulla sua matrice completa riducendo a scala la matrice dei coefficienti — che è sempre A ; perciò possiamo operare simultaneamente su tutti i sistemi manipolando la “matrice completa simultanea” formata da A e da tutte le colonne dei termini noti insieme, cioè $(A \parallel \underline{e}_1 | \dots | \underline{e}_n | \underline{b})$ con l'obiettivo di ridurre a scala la parte sinistra — dove all'inizio della procedura abbiamo la matrice dei coefficienti A — di tale “matrice completa simultanea”. Nel nostro caso, i calcoli espliciti ci danno

$$\begin{aligned} (A \parallel \underline{e}_1 | \dots | \underline{e}_n | \underline{b}) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{3^a \mapsto 3^a + 1^a} \\ &\xrightarrow{3^a \mapsto 3^a + 1^a} \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{3^a \mapsto 3^a + 5/2 \cdot 2^a} \\ &\xrightarrow{3^a \mapsto 3^a + 5/2 \cdot 2^a} \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/2 & 1 & 5/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Nell'ultima riga, la matrice quadrata 3×3 nella parte sinistra è a scala (superiore), quindi ci arrestiamo. Si noti che gli elementi sulla diagonale sono tutti non nulli, dunque tale matrice — e quindi la matrice iniziale A — è non singolare, quindi invertibile; inoltre, il prodotto degli elementi sulla diagonale è proprio $\det(A)$, e il calcolo diretto ci dà

$$\det(A) = -1 \neq 0 \quad (17)$$

questo è un altro modo per concludere che la matrice A è invertibile — perché sappiamo, in generale, una matrice (quadrata) è invertibile se e soltanto se il suo determinante è non nullo. Questo ci garantisce che i sistemi simultanei che stiamo trattando hanno ciascuno una e una sola soluzione. Per calcolare tale soluzione (per ciascun sistema) proseguiamo

i calcoli lavorando sulla matrice 3×7 che abbiamo ottenuto in modo da ridurre la parte (quadrata) di sinistra a forma diagonale, tramite un procedimento di eliminazione di Gauss dal basso in alto. I calcoli espliciti ci danno

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/2 & 1 & 5/2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2^a \mapsto 2^a - 2 \cdot 3^a \\ 1^a \mapsto 1^a + 4 \cdot 3^a}} \\ & \xrightarrow{\substack{2^a \mapsto 2^a - 2 \cdot 3^a \\ 1^a \mapsto 1^a + 4 \cdot 3^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 10 & 4 & 13 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/2 & 1 & 5/2 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a \mapsto 1^a + 2^a} \\ & \xrightarrow{1^a \mapsto 1^a + 2^a} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/2 & 1 & 5/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

A questo punto l'ultimo passaggio da fare è dividere ciascuna riga — nell'ultima matrice trovata — per il corrispondente elemento diagonale nella parte (quadrata) di sinistra: facendo questo si ottiene

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 5/2 & 1 & 5/2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1^a \mapsto 1^{-1} \cdot 1^a \\ 2^a \mapsto (-2)^{-1} \cdot 2^a \\ 3^a \mapsto (1/2)^{-1} \cdot 3^a}} \\ & \xrightarrow{\substack{1^a \mapsto 1^{-1} \cdot 1^a \\ 2^a \mapsto (-2)^{-1} \cdot 2^a \\ 3^a \mapsto (1/2)^{-1} \cdot 3^a}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & 2 & 5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Adesso nell'ultima matrice ottenuta guardiamo la parte di destra (cioè le quattro colonne più a destra): per quanto già spiegato, le sue prime tre colonne (cioè le colonne 4, 5 e 6) ci danno la soluzione $X = A^{-1}$ al nostro problema di calcolo dell'inversa di A , dunque abbiamo trovato

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Ovviamente possiamo anche *verificare* che tale formula è corretta, osservando che il calcolo del prodotto righe per colonne dà effettivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e analogamente

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— in effetti è sufficiente fare una sola delle verifiche, perché se vale una delle due identità, allora automaticamente vale anche l'altra.

A seguire, la settima e ultima colonna a destra nell'ultima matrice trovata ci dà la soluzione del sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$: dunque per tale sistema abbiamo trovato la soluzione (unica!) data da

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Anche in questo caso, possiamo fare una *verifica* andando a vedere che il calcolo del prodotto righe per colonne dà effettivamente

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 \\ 0 \cdot 7 + (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{b}$$

per cui la soluzione trovata è effettivamente corretta.

(a) — Secondo metodo: Ricordiamo che una matrice quadrata A è invertibile se e soltanto se $\det(A) \neq 0$. Nel caso della matrice in esame, il calcolo del determinante tramite la regola di Sarrus ci dà

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-2) - (-2) \cdot (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 0 = \\ &= 0 - 2 + 0 + 4 - 3 - 0 = -1 \neq 0 \end{aligned}$$

— che è lo stesso risultato già trovato in (17). In alternativa, possiamo calcolare lo stesso determinante tramite sviluppo lungo la prima colonna, il che ci dà

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= 1 \cdot ((-2) \cdot 0 - 1 \cdot 3) - 0 \cdot (2 \cdot 0 - (-2) \cdot 3) + (-1) \cdot (2 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2)) = \\ &= 1 \cdot (-3) - 0 \cdot 6 + (-1) \cdot (-2) = -3 - 0 + 2 = -1 \end{aligned}$$

In ogni caso, troviamo che $\det(A) = -1 \neq 0$ e quindi A è invertibile.

A questo punto, per calcolare la matrice inversa A^{-1} possiamo usare la formula esplicita

$$A^{-1} = (a'_{ij})_{i=1,2,3; j=1,2,3} \quad \text{con} \quad a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det(a_{rs})_{r=1,2,3; r \neq j}^{s=1,2,3; s \neq i} \det(A)^{-1} \quad (20)$$

per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$, che nel caso in esame ci dà

$$\begin{aligned} a'_{1,1} &= (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} (-1)^{-1} = 3 \\ a'_{1,2} &= (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} (-1)^{-1} = 6 \\ a'_{1,3} &= (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} (-1)^{-1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a'_{2,1} &= (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (-1)^{-1} = 1 \\
a'_{2,2} &= (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (-1)^{-1} = 2 \\
a'_{2,3} &= (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (-1)^{-1} = 1 \\
a'_{3,1} &= (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} (-1)^{-1} = 2 \\
a'_{3,2} &= (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} (-1)^{-1} = 5 \\
a'_{3,3} &= (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} (-1)^{-1} = 2
\end{aligned}$$

In base a questi risultati la (20) ci dà

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

che è lo stesso risultato già trovato in (18).

(b) — Secondo metodo: Dovendo risolvere il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$, osserviamo che se la matrice A è invertibile allora tale sistema ha una e una sola soluzione data esplicitamente da

$$\underline{x} = A^{-1} \underline{b} \quad (22)$$

Ora, da quanto già visto al punto (a) sappiamo che A è effettivamente invertibile, e ne conosciamo esplicitamente l'inversa A^{-1} : perciò da grazie alla (21) la formula in (22) diventa

$$\underline{x} = A^{-1} \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

che è esattamente lo stesso risultato già trovato in (19) col primo metodo.

(c) — Possiamo risolvere questo quesito con diversi metodi, più o meno semplici.

Primo metodo: Osserviamo che una matrice quadrata M di taglia k è invertibile se e soltanto se per ogni $n \in \mathbb{N}$ è invertibile la sua potenza n -esima M^n , cioè

$$\exists M^{-1} \iff \exists (M^n)^{-1} = (M^{-1})^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (23)$$

Infatti abbiamo

$$\exists M^{-1} \implies \exists (M^n)^{-1} = (M^{-1})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

in quanto

$$\begin{aligned} M^n \cdot (M^{-1})^n &= \underbrace{M \cdots M}_n \cdot \underbrace{M^{-1} \cdots M^{-1}}_n = \underbrace{M \cdots M}_{n-1} \cdot M \cdot M^{-1} \cdot \underbrace{M^{-1} \cdots M^{-1}}_{n-1} = \\ &= \underbrace{M \cdots M}_{n-1} \cdot I_k \cdot \underbrace{M^{-1} \cdots M^{-1}}_{n-1} = \underbrace{M \cdots M}_{n-1} \cdot \underbrace{M^{-1} \cdots M^{-1}}_{n-1} = \cdots = M \cdot M^{-1} = I_k \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} (M^{-1})^n \cdot M^n &= \underbrace{M^{-1} \cdots M^{-1}}_n \cdot \underbrace{M \cdots M}_n = \underbrace{M^{-1} \cdots M^{-1}}_{n-1} \cdot M^{-1} \cdot M \cdot \underbrace{M \cdots M}_{n-1} = \\ &= \underbrace{M^{-1} \cdots M^{-1}}_{n-1} \cdot I_k \cdot \underbrace{M \cdots M}_{n-1} = \underbrace{M^{-1} \cdots M^{-1}}_{n-1} \cdot \underbrace{M \cdots M}_{n-1} = \cdots = M^{-1} \cdot M = I_k \end{aligned}$$

il che ci dice che la matrice $(M^{-1})^n$ è proprio l'inversa della matrice M^n , per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il viceversa è ovvio: se esiste $(M^n)^{-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, in particolare per $n = 1$ ciò significa che esiste M^{-1} , q.e.d.

Ora, dalla risoluzione del punto (a) sappiamo che la matrice $M := A$ è effettivamente invertibile, con inversa A^{-1} data da (18) e (21). Perciò la (23) ci assicura che la matrice A^3 è a sua volta invertibile.

Secondo metodo: Ricordiamo che una matrice (quadrata) M è invertibile se e soltanto se il suo determinante è diverso da zero, cioè

$$M \text{ è invertibile} \iff \det(M) \neq 0 \quad (24)$$

Ora, nel caso della matrice $M = A^3$ abbiamo

$$\det(A^3) = \det(A)^3$$

grazie al *Teorema di Binet* — per il quale, in breve “il determinante di un prodotto di matrici è il prodotto dei determinanti delle matrici fattore”; questo in particolare implica che

$$\det(A^3) \neq 0 \iff \det(A) \neq 0$$

quindi dalla (24) — applicata due volte, alla matrice $M = A^3$ e alla matrice $M = A$ — abbiamo anche che

$$A^3 \text{ è invertibile} \iff A \text{ è invertibile} \quad (25)$$

D'altra parte, al punto (a) abbiamo stabilito che effettivamente la matrice A è invertibile, perciò dalla (25) concludiamo che la matrice A^3 è anch'essa invertibile.

Si noti che, per lo stesso ragionamento, se al punto (a) avessimo concluso (sbagliando!...) che la matrice A fosse *non invertibile*, a questo punto avremmo potuto concludere (sbagliando, ma coerentemente con quanto già fatto) che la matrice A^3 fosse anch'essa non invertibile.

In alternativa, potremmo anche calcolare esplicitamente la matrice A^3 , e poi calcolarne esplicitamente il determinante verificando così direttamente che è diverso da zero. Questo appunto è possibile ma comporta calcoli molto più macchinosi, per cui — benché sia corretto — non è una buona strategia da seguire.

[4] — Discutiamo il problema nel suo complesso, per poi rispondere ai singoli quesiti.

Dalla teoria generale, sappiamo che — per ogni $t \in \mathbb{Q}$ — la dimensione del sottospazio $\text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t))$ generato dai quattro vettori $\underline{u}(t)$, $\underline{v}(t)$, $\underline{w}(t)$ e $\underline{x}(t)$ è pari al rango della matrice $M(t)$ di cui essi sono le colonne, cioè

$$\dim(\text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t))) = \text{rg}(M(t))$$

dove

$$M(t) := (\underline{u}(t) | \underline{v}(t) | \underline{w}(t) | \underline{x}(t)) = \begin{pmatrix} 2+t & 1+t & 1 & t-1 \\ t & t & 0 & 1 \\ 2+2t & 1+2t & 1 & t^2 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il rango della matrice $M(t)$ vogliamo a ridurla a scala. A tal fine per, osserviamo che nella prima colonna tutti i coefficienti dipendono dal parametro t , e questo rende problematico sceglierne uno che faccia da pivot (perché bisogna sempre considerare — e trattare a parte — i casi in cui un certo coefficiente, per certi valori di t , sia pari a zero, e quindi non possa essere scelto come pivot. Osserviamo però che nella matrice $M(t)$ c'è la terza colonna che ha tutti coefficienti costanti, due dei quali pari a 1 — e quindi molto comodi come pivot, nel senso che i calcoli vengono più semplici. Andiamo allora a considerare la nuova matrice

$$N(t) := (\underline{w}(t) | \underline{u}(t) | \underline{v}(t) | \underline{x}(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 1+t & t-1 \\ 0 & t & t & 1 \\ 1 & 2+2t & 1+2t & t^2 \end{pmatrix}$$

che per i nostri scopi va altrettanto bene perché

$$\text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t)) = \text{Span}(\underline{w}(t), \underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{x}(t))$$

per definizione. Allora, procedendo a ridurre a scala la matrice $N(t)$ troviamo

$$\begin{aligned} N(t) &:= \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 1+t & t-1 \\ 0 & t & t & 1 \\ 1 & 2+2t & 1+2t & t^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a \text{ r.} \mapsto 3^a \text{ r.} - 1^a \text{ r.}} \\ &\xrightarrow{3^a \text{ r.} \mapsto 3^a \text{ r.} - 1^a \text{ r.}} \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 1+t & t-1 \\ 0 & t & t & 1 \\ 0 & t & t & t^2-t+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3^a \text{ r.} \mapsto 3^a \text{ r.} - 2^a \text{ r.}} \\ &\xrightarrow{3^a \text{ r.} \mapsto 3^a \text{ r.} - 1^a \text{ r.}} \begin{pmatrix} 1 & 2+t & 1+t & t-1 \\ 0 & t & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t^2-t \end{pmatrix} =: \Sigma(t) \end{aligned}$$

A questo punto analizziamo la forma della matrice $\Sigma(t)$ ottenuta per ultima. Si presentano tre casi distinti:

Primo caso: $t \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ — In questo caso abbiamo $t^2 - t \neq 0$, perché le radici del polinomio $t^2 - t$ sono esattamente $t = 0$ e $t = 1$. Allora la matrice $\Sigma(t)$ ha esattamente $r = 3$ pivot (diversi da zero, per definizione), precisamente il pivot $p_1 = 1$ in posizione $(1, 1)$, il pivot $p_2 = t$ in posizione $(2, 2)$, e il pivot $p_3 = t^2 - t$ in posizione $(3, 4)$.

Pertanto la matrice $\Sigma(t)$, e quindi anche la matrice iniziale $N(t)$, ha rango 3, quindi in conclusione abbiamo

$$\dim(\text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t))) = \text{rg}(N(t)) = 3 \quad \forall t \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\} \quad (26)$$

che è la risposta al quesito (a) per i suddetti valori del parametro t .

Inoltre, in tutti questi casi abbiamo che la sottomatrice $\Sigma'(t)$ di $\Sigma(t)$ formata dalle prime tre colonne ha soltanto 2 pivot, dunque ha rango 2: allora lo stesso vale per la sottomatrice $N'(t)$ di $N(t)$ formata dalle prime tre colonne, che sono i tre vettori $\underline{w}(t)$, $\underline{u}(t)$ e $\underline{v}(t)$. Ma questo significa che

$$\dim(\text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t))) = \text{rg}(N'(t)) = 2 \quad \forall t \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$$

che confrontato con (26) ci permette di concludere che

$$\underline{x}(t) \notin \text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t)) \quad \forall t \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$$

che è la risposta al quesito (b) per i suddetti valori del parametro t .

Secondo caso: $\underline{t} = 1$ — In questo caso la matrice $\Sigma(t) = \Sigma(1)$ è

$$\Sigma(t) = \Sigma(1) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque ha esattamente $r = 2$ pivot, precisamente il pivot $p_1 = 1$ in posizione $(1, 1)$ e il pivot $p_2 = 1$ in posizione $(2, 2)$. Perciò $\Sigma(1)$, e quindi anche la matrice $N(1)$, ha rango 2, e in conclusione abbiamo

$$\dim(\text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t))) = \text{rg}(N(t)) = 2 \quad \text{per } t = 1 \quad (27)$$

che è la risposta al quesito (a) per il valore del parametro $t = 1$.

Inoltre, in questo caso la sottomatrice $\Sigma'(t) = \Sigma'(1)$ di $\Sigma(1)$ formata dalle prime tre colonne ha ancora 2 pivot, dunque ha rango 2, e lo stesso vale per la sottomatrice $N'(1)$ di $N(1)$ formata dalle prime tre colonne, che sono i tre vettori $\underline{w}(1)$, $\underline{u}(1)$ e $\underline{v}(1)$. Questo significa che

$$\dim(\text{Span}(\underline{w}(1), \underline{u}(1), \underline{v}(1))) = \text{rg}(N'(1)) = 2 = \dim(\text{Span}(\underline{w}(1), \underline{u}(1), \underline{v}(1), \underline{x}(1)))$$

che confrontato con (27) ci dice che

$$\underline{x}(t) \in \text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t)) \quad \text{per } t = 1$$

che è la risposta al quesito (b) per il valore del parametro $t = 1$.

Terzo caso: $\underline{t} = 0$ — In questo caso la matrice $\Sigma(t) = \Sigma(0)$ è

$$\Sigma(t) = \Sigma(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque ha nuovamente $r = 2$ pivot, che sono il pivot $p_1 = 1$ in posizione $(1, 1)$ e il pivot $p_2 = 1$ in posizione $(2, 4)$. Perciò $\Sigma(0)$, e quindi anche la matrice $N(0)$, ha rango 2, e possiamo concludere che

$$\dim(\text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t), \underline{x}(t))) = \text{rg}(N(t)) = 2 \quad \text{per } t = 0 \quad (28)$$

che è la risposta al quesito (a) per il valore del parametro $t = 0$.

In aggiunta, in questo caso la sottomatrice $\Sigma'(t) = \Sigma'(0)$ di $\Sigma(0)$ formata dalle prime tre colonne ha soltanto 1 pivot — il solo $p_1 = 1$ — dunque ha rango 1, e lo stesso vale per la sottomatrice $N'(0)$ di $N(0)$ formata dalle prime tre colonne, cioè dai tre vettori $\underline{w}(0)$, $\underline{u}(0)$ e $\underline{v}(0)$. Questo significa che

$$\dim(\text{Span}(\underline{w}(0), \underline{u}(0), \underline{v}(0))) = \text{rg}(N'(0)) = 1 \not\geq \dim(\text{Span}(\underline{w}(0), \underline{u}(0), \underline{v}(0), \underline{x}(0)))$$

che insieme alla (27) ci dice che

$$\underline{x}(t) \notin \text{Span}(\underline{u}(t), \underline{v}(t), \underline{w}(t)) \quad \text{per } t = 0$$

che è la risposta al quesito (b) per il valore del parametro $t = 0$.