CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018–2019

Esame scritto del 20 Settembre 2019 — Sessione Autunnale, II appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

········· ∗ ·········

[1] — Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ e la funzione lineare ad essa associata

$$L_A : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3 \quad , \qquad \underline{x} \mapsto L_A(\underline{x}) := A\,\underline{x} \qquad \forall\ \underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \ .$$

(a) Calcolare gli autovalori di L_A .

(b) Calcolare gli autospazi di L_A .

(c) Determinare se L_A sia diagonalizzabile oppure no. In caso negativo, si giustifichi il perché; in caso positivo, si determini una base esplicita di autovettori.

(d) Dato $\underline{v} := \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcolare esplicitamente l'immagine $L_A^n(\underline{v})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

[2] — Nello spazio affine reale tridimensionale $\mathcal{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino i tre punti $A := (1\,,0\,,1)$, $B := (3\,,1\,,1)$, $C := (0\,,1\,,-2)$, la retta r passante per i due punti A e B , la retta s di equazioni cartesiane $s : \begin{cases} x - 3\,y + z = 4 \\ y + z = 1 \end{cases}$, e il piano π passante per il punto C e parallelo alle due rette r ed s .

(a) Determinare equazioni parametriche della retta r .

(b) Determinare equazioni parametriche del piano π .

(c) Determinare equazioni cartesiane del piano π .

(d) Determinare la mutua posizione delle due rette r ed s — cioè se siano tra loro coincidenti, o parallele, o sghembe.

[3] — Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Determinare se A sia invertibile oppure no. In caso positivo, calcolare esplicitamente la matrice inversa A^{-1} ; in caso negativo, calcolare esplicitamente il rango $rg(A)$.

(b) Risolvere il sistema lineare $A\,\underline{x} = \underline{b}$ con $\underline{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) Determinare — giustificando opportunamente la conclusione — se la matrice A^3 sia invertibile oppure no.

[4] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^3$ di dimensione 3 su $\mathbb{Q}$, si considerino i quattro vettori (dipendenti dal parametro $t \in \mathbb{Q}$)

$$\underline{u}(t) := \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 2+2\,t \end{pmatrix} \; , \quad \underline{v}(t) := \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1+2\,t \end{pmatrix} \; , \quad \underline{w}(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; , \quad \underline{x}(t) := \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare $dim\big(Span\big(\,\underline{u}(t)\,,\underline{v}(t)\,,\underline{w}(t)\,,\underline{x}(t)\big)\big)$, per ogni $t \in \mathbb{Q}$.

(b) Determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{Q}$ tali che $\underline{x}(t) \in Span\big(\,\underline{u}(t)\,,\underline{v}(t)\,,\underline{w}(t)\big)$.