

CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018–2019

Esame scritto del 18 Febbraio 2020 — Sessione Invernale, II appello

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Nello spazio affine $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}^3$ di dimensione 3 su $\mathbb{Q}$, si considerino le due rette ℓ_1 e ℓ_2 con equazioni parametriche e equazioni cartesiane rispettivamente

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -2t + 4 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{Q}) \qquad \ell_2 : \begin{cases} x + y - z - 5 = 0 \\ 2x + y - 2z + 9 = 0 \end{cases}$$

- (a) dimostrare che le rette ℓ_1 e ℓ_2 non sono coincidenti l'una con l'altra;
- (b) dimostrare che le rette ℓ_1 e ℓ_2 non sono parallele l'una con l'altra;
- (c) indicando con π l'unico piano in $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}^3$ parallelo alle rette ℓ_1 e ℓ_2 , determinare:
 - (c.1) equazioni cartesiane per il piano π ;
 - (c.2) equazioni parametriche per il piano π .

[2] — Si considerino la matrice $M \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e il vettore $\underline{b} \in \mathbb{R}^3$ definiti da

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} := \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Dimostrare che la matrice A è invertibile.
- (b) Calcolare la matrice A^{-1} inversa di A .
- (c) Calcolare il rango della matrice A .
- (d) Calcolare l'inversa della matrice A^2 .
- (e) Determinare se esista un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ tale che $A\underline{x} = \underline{b}$. In caso negativo, si giustifichi perché tale vettore non esista; in caso positivo, si determini esplicitamente un tale vettore $\underline{x}$.

[3] — Si consideri la matrice $L := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 3}(\mathbb{Q})$.

(a) Determinare il rango di L .

(b) Determinare una base del sottospazio vettoriale $\text{Ker}(L)$ di $V := \mathbb{Q}^3$.

(c) Determinare una base del sottospazio vettoriale $\text{Im}(L)$ di $W := \mathbb{Q}^4$.

[4] — Si consideri la matrice $M := \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 & 0 \\ -5 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

(a) Determinare quali numeri $\lambda \in \{-1, 0, +1, +\sqrt{2}, +3\}$ siano autovalori di M .

(b) Determinare tutti gli autovalori di M .

(c) Determinare se la matrice M sia diagonalizzabile oppure no; inoltre,

(c.-) nel caso in cui la matrice M non sia diagonalizzabile, si spieghi esplicitamente la ragione;

(c.+) nel caso in cui la matrice M sia diagonalizzabile, si calcoli esplicitamente una base di autovettori di M per lo spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$.