CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI
a.a. 2018–2019

Esame scritto del 6 Settembre 2019 — Sessione Autunnale, I appello

Testo & Svolgimento

..... *

[1] — Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ e la funzione

$$T_A : Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Q}) \longrightarrow Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Q}) \quad , \quad N \mapsto T_A(N) := A \cdot N$$

per ogni $N \in Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$, dove “ $\cdot$ ” indica il prodotto righe per colonne tra matrici. Infine, consideriamo la base

$$B := \left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dello spazio vettoriale $Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$.

- (a) Determinare il valore del determinante $\det(T_A(N))$ per ogni $N \in Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$.
- (b) Descrivere esplicitamente l'insieme $T_A(Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Q})) \cap GL_2(\mathbb{Q})$.
- (c) Verificare che la funzione T_A è lineare — dunque è un endomorfismo dello spazio vettoriale $V := Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$.
- (d) Determinare la matrice M di forma 4×4 a coefficienti in $\mathbb{Q}$ canonicamente associata alla funzione lineare T_A rispetto alla base B di $Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$.
- (e) Calcolare lo spettro $Sp(T_A)$ dell'endomorfismo T_A .
- (f) Descrivere esplicitamente tutti gli autospazi (rispetto a ciascun autovalore) di T_A .

[2] — Nello spazio affine complesso tridimensionale $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^3$ si considerino i quattro punti $A := (1, 0, 0)$, $B := (0, 1, 0)$, $C := (2, 1, 3)$, $D := (1, -2, 0)$, il piano π_{BCD} passante per i tre punti B , C e D , e le due rette ℓ_{AC} , ℓ_{BD} , passanti rispettivamente per i due punti A , C , e per i due punti B , D .

- (a) Determinare equazioni parametriche del piano π_{BCD} .
- (b) Determinare equazioni cartesiane del piano π_{BCD} .
- (c) Determinare la mutua posizione delle due rette ℓ_{AC} e ℓ_{BD} — cioè se siano tra loro coincidenti, o parallele, o sghembe.

[3] — Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ una matrice quadrata di taglia $n (\in \mathbb{N}_+)$ per la quale esista un $N \in \mathbb{N}_+$ tale che $A^N = \mathbf{0}_{n \times n}$ (la *matrice nulla* — i cui coefficienti sono tutti 0 — di taglia $n \times n$). Dimostrare che:

- (a) $\det(A) = 0$;
- (b) $\text{Sp}(A) = \{0\}$;
- (c) $\text{rg}(A) \leq n$;
- (d) la matrice $(I_n + A)$ è invertibile;
- (e) A è diagonalizzabile $\iff A = \mathbf{0}_{n \times n}$.

[4] — Nello spazio affine $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^3$ di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, si consideri il sottospazio affine $\mathcal{S}_k$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, con equazioni cartesiane

$$\mathcal{S}_k : \begin{cases} kx + z = 3k + 2 \\ 8x - y + k^2z = -2 \\ 2ky = -k \end{cases}$$

- (a) Determinare tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali sia $\mathcal{S}_k \neq \emptyset$.
- (b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{S}_k \neq \emptyset$, determinare la dimensione di $\mathcal{S}_k$.

[5] — Dato lo spazio vettoriale $V := \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})$ delle matrici quadrate di taglia $n (\in \mathbb{N}_+)$, si consideri la funzione

$$\text{Tr} : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q} \quad , \quad A := (a_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n} \mapsto \text{Tr}(A) := \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

- (a) Verificare che la funzione Tr è lineare.
- (b) Calcolare $\text{rg}(\text{Tr}) := \dim(\text{Im}(\text{Tr}))$;
- (c) Calcolare $\dim(\text{Ker}(\text{Tr}))$.

— ★ —

SVOLGIMENTO

N.B.: lo svolgimento qui presentato è molto lungo... Questo non significa che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si approfitta per spiegare — in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con molti particolari tutti gli aspetti della teoria toccati più o meno a fondo dal testo in questione.

[1] — Rispondiamo ai diversi quesiti uno a uno. Cominciamo però descrivendo esplicitamente la funzione T_A : dalla definizione abbiamo, per $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$, che la sua immagine per la funzione T_A è

$$T_A(N) := A \cdot N = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - z & -2y - u \\ 4x + 2z & 4y + 2u \end{pmatrix} \quad (1)$$

(a) Per calcolare il determinante $\det(T_A(N))$ — per ogni $N \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ — possiamo usare direttamente l'espressione in (1) e la formula standard per i determinanti di matrici 2×2 : così troviamo

$$\begin{aligned} \det(T_A(N)) &= \det \begin{pmatrix} -2x - z & -2y - u \\ 4x + 2z & 4y + 2u \end{pmatrix} = \\ &= (-2x - z)(4y + 2u) - (-2y - u)(4x + 2z) = \\ &= -8xy - 4xu - 4zy - 2zu + 8yx + 4yz + 4ux + 2uz = 0 \end{aligned}$$

cioè in conclusione

$$\det(T_A(N)) = 0 \quad \forall N \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q}) \quad (2)$$

In alternativa, lo stesso risultato si può ottenere come segue. Per il *Teorema di Binet* sappiamo che il determinante è una funzione *moltiplicativa*, cioè il determinante di un prodotto è il prodotto dei determinanti delle matrici fattore: da questo segue che

$$\det(T_A(N)) = \det(A \cdot N) = \det(A) \cdot \det(N) \quad (3)$$

A questo punto osserviamo che

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 4 = -4 - (-4) = 0 \quad (4)$$

e quindi mettendo insieme (3) e (4) otteniamo di nuovo la (2), q.e.d.

(b) Ricordiamo che $GL_2(\mathbb{Q})$ è, per definizione, l'insieme delle matrici in $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ che siano (anche) invertibili. Ma una matrice (quadrata) è invertibile se e soltanto se ha determinante non nullo, quindi è anche

$$GL_2(\mathbb{Q}) = \{ X \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q}) \mid \det(X) \neq 0 \} \quad (5)$$

Ora, in forza della (2) abbiamo

$$T_A(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})) \subseteq \{ X \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q}) \mid \det(X) = 0 \} \quad (6)$$

e quindi mettendo insieme (5) e (6) otteniamo che

$$T_A(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})) \cap GL_2(\mathbb{Q}) = \emptyset$$

(c) Per verificare che T_A sia lineare, dobbiamo controllare che valgano le identità

$$T_A(c_1 N_1 + c_2 N_2) = c_1 T_A(N_1) + c_2 T_A(N_2) \quad (7)$$

per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{Q}$ e ogni $N_1, N_2 \in V := \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$. Ora, il calcolo diretto ci dà

$$\begin{aligned} T_A(c_1 N_1 + c_2 N_2) &:= A \cdot (c_1 N_1 + c_2 N_2) = A \cdot (c_1 N_1) + A \cdot (c_2 N_2) = \\ &= c_1 (A \cdot N_1) + c_2 (A \cdot N_2) = c_1 T_A(N_1) + c_2 T_A(N_2) \end{aligned}$$

per le proprietà fondamentali del prodotto righe per colonne, e quindi la (7) è verificata.

In alternativa, lo stesso risultato si ottiene calcolando la forma esplicita dei due membri dell'identità in (7) applicando tre volte la formula (1).

(d) Ricordiamo che la matrice associata alla funzione T_A rispetto alla base B è quella che ha per colonne le stringhe di coefficienti che compaiono nelle espressioni delle immagini dei vettori di B come combinazioni lineari dei vettori stessi di B . Ora, utilizzando la formula (1) otteniamo esplicitamente

$$\begin{aligned} T_A(b_1) &= T_A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2b_1 + 4b_3 \\ T_A(b_2) &= T_A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2b_2 + 4b_4 \\ T_A(b_3) &= T_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1b_1 + 2b_3 \\ T_A(b_4) &= T_A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1b_2 + 2b_4 \end{aligned}$$

e quindi la matrice M cercata è

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

(e) Ricordiamo che lo spettro $Sp(T_A)$ è l'insieme di tutti gli autovalori di T_A . Dovendo trovare tali autovalori, possiamo seguire due metodi.

Primo metodo: Sia $\lambda \in Sp(T_A)$ un qualunque autovalore di T_A , e sia $N \in V \setminus \{0\}$ un suo autovettore — con $V := \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ — per cui abbiamo $T_A(N) = \lambda N$. Ma allora è anche $T_A^2(N) = T_A(T_A(N)) = T_A(\lambda N) = \lambda T_A(N) = \lambda^2 T_A(N)$, cioè in sintesi

$$T_A^2(N) = \lambda^2 T_A(N) \quad (9)$$

D'altra parte, dalle definizioni abbiamo anche

$$T_A^2(N) = T_A(T_A(N)) = A \cdot (A \cdot N) = A^2 \cdot N = \mathbf{0}_{2 \times 2} \cdot N = \mathbf{0}_{2 \times 2} \quad (10)$$

perché $A^2 = \mathbf{0}_{2 \times 2}$ (la matrice nulla di taglia 2×2 , con tutti coefficienti pari a 0) come risulta dal calcolo diretto. Confrontando (9) con (10) troviamo $\lambda^2 T_A(N) = \mathbf{0}_{2 \times 2}$, quindi siccome per ipotesi $N \neq 0$ possiamo concludere che $\lambda = 0$. Perciò se esiste un autovalore di T_A esso è necessariamente $\lambda 0$, così $Sp(T_A) \subseteq \{0\}$.

D'altra parte, l'osservazione che $A^2 = 0$ implica anche che

$$T_A(A) = A \cdot A = A^2 = \mathbf{0}_{2 \times 2} = 0A$$

perciò abbiamo che $A \in V \setminus \{0\}$ è un *autovettore* di T_A con autovalore $\lambda = 0$.

Dunque effettivamente si ha che $0 \in Sp(T_A)$, e siccome abbiamo già visto in precedenza che $Sp(T_A) \subseteq \{0\}$ possiamo infine concludere che $Sp(T_A) = \{0\}$.

Secondo metodo: Ricordiamo che gli autovalori di T_A sono tutte e sole le radici del *polinomio caratteristico* di T_A , che indichiamo con $p_{T_A}(x)$. Possiamo allora calcolare questo polinomio e poi determinarne le radici.

Per definizione di “polinomio caratteristico”, e utilizzando la matrice M associata a T_A rispetto alla base B calcolata al punto (d), abbiamo

$$\begin{aligned} p_{T_A}(x) &:= \det(M - xI_4) = \det \begin{pmatrix} -2-x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2-x & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2-x \end{pmatrix} = \\ &= (-2-x) \cdot ((-2-x) \cdot (2-x)^2 - (-1) \cdot (2-x) \cdot 4) + (-1) \cdot (4 \cdot 4 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2-x) \cdot (2-x)) = \\ &= x^4 \end{aligned}$$

cioè

$$p_{T_A}(x) = x^4$$

Allora $p_{T_A}(x)$ ha la sola radice $x = 0$, e quindi concludiamo che $Sp(T_A) = \{0\}$.

(f) Dal punto (e) sappiamo T_A ha il solo autovalore $\lambda = 0$, e in corrispondenza abbiamo il solo autospazio $V_0 = \text{Ker}(T_A)$ — per $V := \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{Q})$ — che ora descriviamo esplicitamente. Utilizzando la (1) otteniamo

$$\begin{aligned} V_0 = \text{Ker}(T_A) &= \left\{ N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \mid T_A(N) = \begin{pmatrix} -2x - z & -2y - u \\ 4x + 2z & 4y + 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \mid x, y, z, u \in \mathbb{Q} : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2y + u = 0 \end{cases} \right\} = \\ &= \left\{ N = \begin{pmatrix} r & s \\ -2r & -2s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{Q} \right\} \end{aligned}$$

così che la descrizione cercata è

$$V_0 = \left\{ N = \begin{pmatrix} r & s \\ -2r & -2s \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{Q} \right\}$$

[2] — Affrontiamo i diversi quesiti uno alla volta.

(a) Osserviamo che il piano π_{BCD} è l'unico piano passante per il punto B e parallelo ai due vettori $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$, cioè avente $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$ come vettori di giacitura. Perciò π_{BCD} è descritto dalla equazione vettoriale

$$\pi_{BCD} : \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BC} + s\overrightarrow{BD}, \quad \forall r, s \in \mathbb{C} \quad (11)$$

A questo punto, osservando che

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} = B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \overrightarrow{BC} = C - B &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{BD} = D - B &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

l'equazione vettoriale (11) si traduce nelle equazioni parametriche

$$\pi_{BCD} : \begin{cases} x = 2r + s \\ y = 1 - 3s \\ z = 3r \end{cases} \quad (\forall r, s \in \mathbb{C}) \quad (12)$$

(b) Cerchiamo ora equazioni cartesiane di π_{BCD} , ricavandole dalle equazioni parametriche in (12). A tal fine, bisogna dedurre da queste ultime un sistema di equazioni lineari nelle variabili x, y, z , eliminandone i due parametri r ed s .

Ricordiamo il metodo “standard” che possiamo seguire in questi casi. Dato un sottospazio affine $\mathcal{S}$ in $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$ descritto da equazioni parametriche, queste ultime si possono scrivere (in “modalità compatta”) nella forma matriciale

$$\mathcal{S} : \underline{x} = \underline{x}_0 + A\underline{t} \quad (\forall \underline{t} \in \mathbb{K}^d) \quad (13)$$

dove $\underline{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ indica la stringa delle coordinate di un punto nello spazio affine n -dimensionale $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$, con $\underline{t} := (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{K}^d$ indichiamo la stringa dei d parametri (indipendenti) coinvolti nelle equazioni parametriche, e $d := \dim(\mathcal{S})$, la $A \in \text{Mat}_{d \times n}(\mathbb{K})$ è una matrice $d \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$, e infine $\underline{x}_0 \in \mathbb{K}^n$ è il punto di $\mathcal{S}$ che si ottiene dalla (13) per $\underline{t} = \underline{0}$ (si noti che nel caso presente abbiamo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $n = 3$, $d = 2$).

Il significato delle equazioni parametriche in (13) è che $\mathcal{S}$ è il sottoinsieme dei punti $\underline{x}$ in $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$ dati dalla (13) al variare di $\underline{t} \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^d$: dunque per ogni $\underline{x} \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$ abbiamo

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \exists \underline{t} \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^d : \underline{x} = \underline{x}_0 + A\underline{t}$$

e riformulando l'ultima condizione otteniamo

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \exists \text{ una soluzione del sistema lineare (in } t_1, \dots, t_d) \otimes_x : A\underline{t} = \underline{x} - \underline{x}_0 \quad (14)$$

Ora, sappiamo che un sistema lineare ha soluzioni se e soltanto se il rango della sua matrice dei coefficienti è uguale al rango della sua matrice completa: perciò la (14) ci dà

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A | \underline{x} - \underline{x}_0) \quad (15)$$

Ora, operando sulla matrice completa $(A | \underline{x} - \underline{x}_0)$ per ridurne a scala la parte di sinistra — cioè la A — si ottiene una matrice della forma $(S | \underline{f}(\underline{x} - \underline{x}_0))$ dove S è una riduzione a scala di A e $\underline{f}(\underline{x} - \underline{x}_0)$ indica una colonna di n equazioni lineari in $\underline{x} - \underline{x}_0$, diciamo $f_1(\underline{x} - \underline{x}_0), \dots, f_n(\underline{x} - \underline{x}_0)$. Allora avremo

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A | \underline{x} - \underline{x}_0) \iff \otimes_S : \begin{cases} f_i(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \\ \forall i = n - \text{rg}(A) + 1, \dots, n; \end{cases}$$

e quindi in conclusione la (15) diventa

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \odot_{\mathcal{S}} : \begin{cases} f_i(x - \underline{x}_0) = 0 \\ \forall i = n - \text{rg}(A) + 1, \dots, n; \end{cases} \quad (16)$$

così che il sistema $\odot_{\mathcal{S}} : \begin{cases} f_i(x - \underline{x}_0) = 0 \\ \forall i = n - \text{rg}(A) + 1, \dots, n; \end{cases}$ ci dà equazioni cartesiane per $\mathcal{S}$.

Applichiamo dunque tutto questo al caso di $\mathcal{S} := \pi_{BCD}$: come equazioni parametriche (13) abbiamo le (12), e quindi la matrice completa $(A | \underline{x} - \underline{x}_0)$ che compare in (15) è

$$(A | \underline{x} - \underline{x}_0) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-1 \\ 3 & 0 & z \end{array} \right)$$

di cui ora riduciamo a scala la parte di sinistra, come segue:

$$\begin{aligned} (A | \underline{x} - \underline{x}_0) &= \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-1 \\ 3 & 0 & z \end{array} \right) \xrightarrow{3^a \mapsto 3^a - 3/2 \cdot 1^a} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-1 \\ 0 & -3/2 & z - 3/2 \cdot x \end{array} \right) \rightsquigarrow \\ &\xrightarrow{3^a \mapsto 3^a - 1/2 \cdot 2^a} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-1 \\ 0 & 0 & z - 3/2 \cdot x - 1/2 \cdot y + 1/2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

e da questo otteniamo che le equazioni cartesiane per π_{BCD} come in (16) sono

$$\odot_{\pi_{BCD}} : z - 3/2 \cdot x - 1/2 \cdot y + 1/2 = 0$$

che però riscriviamo nella forma (tecnicamente equivalente, ma anche “esteticamente migliore”)

$$\odot_{\pi_{BCD}} : 3x + y - 2z - 1 = 0 \quad (17)$$

(c) Per determinare la mutua posizione delle rette ℓ_{AC} ed ℓ_{BD} cominciamo a determinare un vettore direttore per ciascuna di esse. Per costruzione, un possibile vettore direttore per ℓ_{AC} è

$$v_{\ell_{AC}} = \overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e analogamente un possibile vettore direttore per ℓ_{BD} è

$$v_{\ell_{BD}} = \overrightarrow{BD} = D - B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo ora che

$$\text{rg}(v_{\ell_{AC}} | v_{\ell_{BD}}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

— ad esempio perché la matrice in esame contiene la sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ che ha determinante diverso da zero, e applichiamo il *Teorema degli Orlati* — perciò i vettori $v_{\ell_{AC}}$ e $v_{\ell_{BD}}$ sono linearmente indipendenti: da questo segue allora che le due rette ℓ_{AC} ed ℓ_{BD} sono *non parallele* — e quindi, in particolare, *non coincidenti*.

A questo punto le rette ℓ_{AC} ed ℓ_{BD} , essendo *non parallele*, potrebbero essere *complanari incidenti* oppure *sghembe*. D'altra parte, abbiamo anche

le rette ℓ_{AC} ed ℓ_{BD} sono *complanari* $\iff$ i punti A, C, B e D sono *complanari* $\iff$
 $\iff A \in \pi_{BCD}$ $\iff$ le coordinate di A soddisfano l'equazione cartesiana (17)

Ora, sostituendo $(x, y, z) = (1, 0, 0) =: A$ nel membro di sinistra della (17) troviamo

$$3 \cdot 1 + 0 - 2 \cdot 0 - 1 = 2 \neq 0$$

il che ci dice che $A \in \pi_{BCD}$ e quindi che le rette ℓ_{AC} ed ℓ_{BD} *non* sono *complanari*. Per esclusione, concludiamo allora che ℓ_{AC} ed ℓ_{BD} sono *sghembe*.

[3] — Affrontiamo i diversi quesiti uno ad uno. Sarà chiaro, tuttavia, che essi sono collegati tra loro, in particolare in vari casi si può sfruttare uno dei risultati parziali per ottenerne un altro. Anche l'ordine in cui affrontiamo i vari punti può cambiare, seguendo strategie diverse.

(a) Dovendo dimostrare che $\det(A) = 0$, osserviamo che dall'ipotesi $A^N = \mathbf{0}_{n \times n}$ segue subito che

$$\det(A^N) = \det(\mathbf{0}_{n \times n}) = 0 \quad (18)$$

Inoltre, dal *Teorema di Binet* sappiamo che il determinante di un prodotto è il prodotto dei determinanti delle matrici fattore, e quindi in particolare il determinante della potenza k -esima di una matrice è la potenza k -esima del determinante della matrice stessa. Nel caso in esame, questo ci dà

$$\det(A^N) = \det(A)^N \quad (19)$$

Ora (18) e (19) insieme implicano che $\det(A)^N = 0$, quindi $\det(A) = 0$, q.e.d.

(b) Ricordiamo che lo spettro $Sp(A)$ della matrice A è l'insieme dei suoi autovalori, i quali sono (anche) le radici del suo polinomio caratteristico, indicato nel seguito con $p_A(x)$ e definito da $p_A(x) := \det(A - xI_n)$.

Dimostriamo prima che $Sp(A) \subseteq \{0\}$. Sia infatti $\lambda \in Sp(A)$ un qualsiasi autovalore di A , e sia $v \in \mathbb{C}^n \setminus \emptyset$ un autovettore di A con autovalore λ , così che $A.v = \lambda v$. Da questo segue subito (con una facile induzione) che $A^k.v = \lambda^k v$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ma allora per $k = N$ abbiamo $A^N.v = \lambda^N v$ e anche $A^N.v = \mathbf{0}_{n \times n} v = \underline{0}$ dove $\underline{0} := (0, \dots, 0)$ è il vettore nullo in $\mathbb{C}^n$: le due cose insieme danno $\lambda^N v = \underline{0}$, e quindi $\lambda^N = 0$, per cui in conclusione $\lambda = 0$. Dunque $Sp(A) \subseteq \{0\}$, q.e.d.

Dimostriamo ora che, viceversa, si ha anche $Sp(A) \supseteq \{0\}$, cioè $0 \in Sp(A)$. A tal fine, possiamo seguire due metodi diversi:

Primo metodo: Sia $d \in \mathbb{N}_+$ il minimo numero naturale positivo tale che $A^d = \mathbf{0}_{n \times n}$ e $A^{d-1} \neq \mathbf{0}_{n \times n}$: si noti che un tale valore d esiste, ed anzi è $d \leq N$, perché per ipotesi $A^N = \mathbf{0}_{n \times n}$. Poiché $A^{d-1} \neq \mathbf{0}_{n \times n}$ esiste un vettore $w \in \mathbb{C}^n$ tale che $u := A^{d-1}.w \neq \underline{0}$; d'altra parte, abbiamo però $A.u = \underline{0}$ perché

$$A.u = A.(A^{d-1}.w) = A^d.w = \mathbf{0}_{n \times n}.w = \underline{0}.$$

Allora $u \neq \underline{0}$ e $A.u = \underline{0}$ insieme significano che u è un autovettore per A con autovalore 0: perciò 0 è autovalore di A , cioè $0 \in Sp(A)$, q.e.d.

Secondo metodo: Il fatto che $\det(A) = 0$ — in forza del punto (a) — significa che $p_A(0) = \det(A) = 0$, dunque $\lambda := 0$ è radice del polinomio caratteristico $p_A(x)$, e quindi è un autovalore di A , così che $0 \in Sp(A)$, q.e.d.

(c) Dal punto (a) sappiamo che $\det(A) = 0$, cioè A è singolare. In questo caso dalla teoria generale sappiamo che $rg(A) \not\leq n$, q.e.d.

(d) Possiamo provare che la matrice $(I_n + A)$ è invertibile tramite due metodi diversi:

Primo metodo: Osserviamo che la matrice $(I_n + A)$ è invertibile se e soltanto se è non singolare, cioè se e soltanto se $\det(I_n + A) \neq 0$. Ancor più, abbiamo la seguente catena di doppie implicazioni:

$$\begin{aligned} (I_n + A) \text{ è non invertibile} &\iff \det(I_n + A) = 0 \iff \\ &\iff \det(A - (-1)I_n) = 0 \iff p_A(-1) = 0 \iff (-1) \in Sp(A) \end{aligned}$$

Ora, dal punto (b) sappiamo che $Sp(A) = \{0\}$, quindi in particolare $(-1) \notin Sp(A)$. Perciò dall'analisi qui sopra possiamo concludere che $(I_n + A)$ è invertibile, q.e.d.

Secondo metodo: Dimostriamo ora che la matrice $(I_n + A)$ è invertibile perché ne troviamo esplicitamente la matrice inversa! Consideriamo infatti la matrice

$$Y := \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k A^k = 1 - A + A^2 - A^3 + A^4 - \dots + (-1)^{N-1} A^{N-1}$$

e osserviamo che il calcolo diretto ci dà

$$\begin{aligned} Y \cdot (I_n + A) &= (I_n + A) \cdot Y = \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k A^k - \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k A^{k+1} = \\ &= I_n - A + A^2 - A^3 + A^4 - \dots + (-1)^{N-2} A^{N-2} + (-1)^{N-1} A^{N-1} + \\ &\quad + (A - A^2 + A^3 - A^4 + A^5 - \dots + (-1)^{N-1} A^{N-1} + (-1)^N A^N) = \\ &= I_n + (-1)^N A^N = I_n + (-1)^N \mathbf{0}_{n \times n} = I_n \end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio sfrutta l'ipotesi $A^N = \mathbf{0}_{n \times n}$. Così abbiamo trovato che $Y \cdot (I_n + A) = I_n$ e $(I_n + A) \cdot Y = I_n$, che significa proprio che $(I_n + A)$ è invertibile con inversa $(I_n + A)^{-1} = Y$.

(e) Ricordiamo che una matrice in $Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$ si dice *diagonalizzabile* se esiste una base di $\mathbb{C}^n$ composta di autovettori. Per la matrice A in esame andiamo a dimostrare che

$$A \text{ è diagonalizzabile} \iff A = \mathbf{0}_{n \times n}$$

dimostrando separatamente le due implicazioni “ $\Leftarrow$ ” e “ $\Rightarrow$ ”.

($\Leftarrow$): Se $A = \mathbf{0}_{n \times n}$, ovviamente abbiamo $A.v = \underline{0}$ per ogni $v \in \mathbb{C}^n$; quindi ogni vettore in $\mathbb{C}^n$ è autovettore di A , con autovalore 0: in particolare ogni base di $\mathbb{C}^n$ è fatta di autovettori, e dunque A è diagonalizzabile, q.e.d.

($\Rightarrow$): Supponiamo ora che la matrice A sia diagonalizzabile, dunque che esista una base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ di $\mathbb{C}^n$ composta di autovettori, cioè $A.b_i = \lambda_i b_i$ per un opportuno autovalore $\lambda_i \in Sp(A) = \{0\}$ — per ogni $i = 1, \dots, n$. Ora, dal punto (b) sappiamo che $Sp(A) = \{0\}$, cioè $\lambda = 0$ è l'unico autovalore di A : dunque $\lambda_i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$, e quindi $A.b_i = \lambda_i b_i$ diventa $A.b_i = \underline{0}$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Siccome i vettori $b_1, \dots, b_n$ formano una base di $\mathbb{C}^n$, da $A.b_i = \underline{0}$ (per ogni $i = 1, \dots, n$) segue subito che $A.v = \underline{0}$ per ogni $v \in \mathbb{C}^n$, e questo a sua volta implica che $A = \mathbf{0}_{n \times n}$, q.e.d.

[4] — Discutiamo il problema nel suo complesso, per poi rispondere ai singoli quesiti.

Per definizione, lo spazio affine $\mathcal{S}_k$ è esattamente l'insieme di tutte le soluzioni — in $\mathbb{R}^3$ — del sistema di “equazioni cartesiane”

$$\mathcal{S}_k : \begin{cases} kx + z = 3k + 2 \\ 8x - y + k^2 z = -2 \\ 2ky = -k \end{cases} \quad (20)$$

di $\mathcal{S}_k$ stesso. Pertanto, avremo $\mathcal{S}_k \neq \emptyset$ se e soltanto se il sistema in (20) ha soluzioni, e in tali casi la dimensione di $\mathcal{S}_k$ sarà la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ costituito dall'insieme di tutte le soluzioni del sistema lineare *omogeneo* associato a (20).

Procediamo descrivendo il sistema in (20) tramite la sua matrice completa $(A_k | \underline{b}_k)$, data esplicitamente da

$$(A_k | \underline{b}_k) := \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 1 & 3k + 2 \\ 8 & -1 & k^2 & -2 \\ 0 & 2k & 0 & -k \end{array} \right)$$

A questo punto, tramite il *metodo di eliminazione di Gauss*, procediamo a trasformare la matrice $(A_k | \underline{b}_k)$ riducendone la parte di sinistra — dove in partenza figura la matrice A_k dei coefficienti del sistema — in forma a scala. Questo può essere fatto in diversi modi (a seconda delle scelte che si fanno passo per passo), qui di seguito ne indichiamo due tra i vari possibili.

Primo metodo: I calcoli diretti ci danno

$$\begin{aligned} (A_k | \underline{b}_k) &= \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 1 & 3k + 2 \\ 8 & -1 & k^2 & -2 \\ 0 & 2k & 0 & -k \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1^a \text{ riga} \mapsto 2^a \text{ riga} \\ 2^a \text{ riga} \mapsto 1^a \text{ riga}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & k^2 & -2 \\ k & 0 & 1 & 3k + 2 \\ 0 & 2k & 0 & -k \end{array} \right) \xrightarrow{\quad} \\ &\xrightarrow{2^a \mapsto 2^a - k/8 \cdot 1^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & k^2 & -2 \\ 0 & k/8 & 1 - k^3/8 & 13/4 \cdot k + 2 \\ 0 & 2k & 0 & -k \end{array} \right) \xrightarrow{3^a \mapsto 3^a - 16 \cdot 2^a} \\ &\xrightarrow{3^a \mapsto 3^a - 16 \cdot 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & k^2 & -2 \\ 0 & k/8 & 1 - k^3/8 & 13/4 \cdot k + 2 \\ 0 & 0 & 2k^3 - 16 & -32 - 53k \end{array} \right) =: (\Sigma_k | \underline{d}_k) \end{aligned}$$

Ora, la matrice $(\Sigma_k \mid \underline{d}_k)$ ottenuta alla fine ha la parte di sinistra — indicata con Σ_k — che è triangolare superiore, ed è a scala se e soltanto i suoi termini diagonali $\sigma_1 := 8$, $\sigma_2 := k/8$ e $\sigma_3 := 2k^3 - 16$ sono tutti diversi da zero. L'analisi diretta ci dà

$$\sigma_1 := 8 \neq 0 \quad \forall k, \quad \sigma_2 := k/8 \neq 0 \quad \forall k \neq 0, \quad \sigma_3 := 2k^3 - 16 \neq 0 \quad \forall k \neq 2 \quad (21)$$

Andiamo ora ad analizzare i diversi casi possibili:

Caso $k \notin \{0, 2\}$: In questi casi la (21) ci garantisce che la matrice Σ_k è a scala, con tre pivot: così abbiamo $rg(\Sigma_k) = 3 = rg(\Sigma_k \mid \underline{d}_k)$ e quindi possiamo concludere che il sistema in (20) ammette soluzioni, e più precisamente — dato che Σ_k è non singolare! — ammette esattamente una e una sola soluzione. Pertanto in tutti questi casi abbiamo

$$(a) \quad \mathcal{S}_k \neq \emptyset, \quad (b) \quad dim(\mathcal{S}_k) = 0 \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

Caso $k = 2$: In questo caso la forma esplicita di $(\Sigma_{k=2} \mid \underline{d}_{k=2})$ è

$$(\Sigma_{k=2} \mid \underline{d}_{k=2}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 17/2 \\ 0 & 0 & 0 & -138 \end{array} \right)$$

per cui abbiamo $rg(\Sigma_{k=2}) = 2 \neq 3 = rg(\Sigma_{k=2} \mid \underline{d}_{k=2})$: perciò concludiamo che il sistema in (20) *non ammette soluzioni*, dunque

$$(a) \quad \mathcal{S}_{k=2} = \emptyset \quad \text{— e il quesito (b) decade.}$$

Caso $k = 0$: In questo caso la forma esplicita di $(\Sigma_{k=0} \mid \underline{d}_{k=0})$ è

$$(\Sigma_{k=0} \mid \underline{d}_{k=0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -32 \end{array} \right)$$

per cui la matrice $\Sigma_{k=0}$ *non è a scala*. Operiamo allora un ulteriore passaggio per ridurla a scala, precisamente

$$(\Sigma_{k=0} \mid \underline{d}_{k=0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -32 \end{array} \right) \xrightarrow{3^a \mapsto 3^a + 16 \cdot 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (\Sigma' \mid \underline{d}')$$

così abbiamo $rg(\Sigma') = 2 = rg(\Sigma' \mid \underline{d}')$ da cui possiamo concludere che il sistema (21) ammette soluzioni, e tali soluzioni formano uno spazio di dimensione

$$dim(\text{Ker}(A_{k=0})) = dim(\mathbb{R}^3) - rg(A_{k=0}) = dim(\mathbb{R}^3) - rg(\Sigma') = 3 - 2 = 1$$

Pertanto, in conclusione abbiamo

$$(a) \quad \mathcal{S}_{k=0} \neq \emptyset, \quad (b) \quad dim(\mathcal{S}_{k=0}) = 1.$$

Secondo metodo: Svolgendo i calcoli in modo leggermente diverso, possiamo procedere come segue, distinguendo i due casi $k \neq 0$ e $k = 0$.

Caso $k \neq 0$: In questo caso operiamo l'eliminazione di Gauss nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 (A_k | \underline{b}_k) &= \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 1 & 3k+2 \\ 8 & -1 & k^2 & -2 \\ 0 & 2k & 0 & -k \end{array} \right) \xrightarrow{2^a \mapsto 2^a - 8/k \cdot 1^a} \\
 &\xrightarrow{2^a \mapsto 2^a - 8/k \cdot 1^a} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 1 & 3k+2 \\ 0 & -1 & k^2 - 8/k & -26 - 16/k \\ 0 & 2k & 0 & -k \end{array} \right) \xrightarrow{3^a \mapsto 3^a + 2k \cdot 2^a} \\
 &\xrightarrow{3^a \mapsto 3^a + 2k \cdot 2^a} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & 1 & 3k+2 \\ 0 & -1 & k^2 - 8/k & -26 - 16/k \\ 0 & 0 & 2k^3 - 16 & -32 - 53k \end{array} \right) =: (S_k | \underline{t}_k)
 \end{aligned}$$

(si noti la somiglianza con quanto già ottenuto col primo metodo). Ora, la matrice $(S_k | \underline{t}_k)$ ottenuta alla fine ha la parte di sinistra — indicata con S_k — che è triangolare superiore, ed è a scala se e soltanto se i suoi termini diagonali $s_1 := k$, $s_2 := -1$ e $s_3 := 2k^3 - 16$ sono tutti diversi da zero. L'analisi diretta ci dà

$$s_1 := k \neq 0 \quad \forall k \neq 0, \quad s_2 := -1 \neq 0 \quad \forall k, \quad s_3 := 2k^3 - 16 \neq 0 \quad \forall k \neq 2 \quad (23)$$

Andiamo quindi ad analizzare i diversi casi possibili: siccome stiamo già supponendo che sia $k \neq 0$, dobbiamo soltanto considerare i due sottocasi $k \notin \{0, 2\}$ e $k = 2$.

Sottocaso $k \notin \{0, 2\}$: In questo caso la (23) ci assicura che la matrice S_k è a scala, con tre pivot: inoltre abbiamo $rg(S_k) = 3 = rg(S_k | \underline{t}_k)$ e quindi possiamo concludere che il sistema in (20) ammette soluzioni, e più precisamente — visto che S_k è non singolare! — ammette esattamente una e una sola soluzione. Perciò in tutti questi casi abbiamo

$$(a) \quad \mathcal{S}_k \neq \emptyset, \quad (b) \quad \dim(\mathcal{S}_k) = 0 \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

Sottocaso $k = 2$: In questo caso la forma esplicita di $(S_{k=2} | \underline{t}_{k=2})$ è

$$(S_{k=2} | \underline{t}_{k=2}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & -138 \end{array} \right)$$

per cui abbiamo $rg(S_{k=2}) = 2 \neq 3 = rg(S_{k=2} | \underline{t}_{k=2})$: pertanto concludiamo che il sistema in (20) *non ammette soluzioni*, e quindi

$$(a) \quad \mathcal{S}_{k=2} = \emptyset \quad \text{— e il quesito (b) decade.}$$

Caso $k = 0$: In questo caso operiamo l'eliminazione di Gauss sulla matrice completa $(A_{k=0} | \underline{b}_{k=0})$ in modo diverso, precisamente

$$(A_{k=0} | \underline{b}_{k=0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1^a \mapsto 2^a \\ 2^a \mapsto 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) =: (S'_0 | \underline{t}'_0)$$

Adesso la matrice $(S'_0 | \underline{t}'_0)$ ottenuta alla fine ha la parte di sinistra — indicata con S'_0 — che è a scala con due pivot, e lo stesso vale per la matrice “completa” $(S'_0 | \underline{t}'_0)$: così

abbiamo $\text{rg}(S'_0) = 2 = \text{rg}(S'_0 | t'_0)$. Possiamo quindi concludere che il sistema in (20) ammette soluzioni, e più precisamente tali soluzioni formano uno spazio di dimensione

$$\dim(\text{Ker}(A_{k=0})) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(A_{k=0}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \text{rg}(S'_0) = 3 - 2 = 1$$

Pertanto, in conclusione abbiamo

$$(a) \quad \mathcal{S}_{k=0} \neq \emptyset \quad , \quad (b) \quad \dim(\mathcal{S}_{k=0}) = 1 \quad .$$

[5] — Affrontiamo i diversi quesiti uno alla volta.

(a) Verificare che la funzione Tr sia lineare significa, per definizione, verificare che goda della proprietà

$$\text{Tr}(c' A' + c'' A'') = c' \text{Tr}(A') + c'' \text{Tr}(A'') \quad \forall c', c'' \in \mathbb{Q}, \quad A', A'' \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q}) \quad (24)$$

Ora, ricordando che la definizione delle operazioni (di spazio vettoriale) per le matrici dà

$$c' A' + c'' A'' := (c' a'_{ij} + c'' a''_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}; \quad \forall A' := (a'_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}; \quad A'' := (a''_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n};$$

la definizione di Tr e i calcoli diretti ci danno

$$\begin{aligned} \text{Tr}(c' A' + c'' A'') &= \text{Tr}\left((c' a'_{ij} + c'' a''_{ij})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}\right) := \sum_{k=1}^n (c' a'_{kk} + c'' a''_{kk}) = \\ &= \sum_{k=1}^n (c' a'_{kk}) + \sum_{k=1}^n (c'' a''_{kk}) = c' \sum_{k=1}^n a'_{kk} + c'' \sum_{k=1}^n a''_{kk} = c' \text{Tr}(A') + c'' \text{Tr}(A'') \end{aligned}$$

così che la (24) è verificata, q.e.d.

(b) Osserviamo che, siccome la funzione $\text{Tr} : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ è lineare — per il punto (a) — la sua immagine $\text{Im}(\text{Tr})$ è un sottospazio vettoriale del suo spazio di arrivo, che è $\mathbb{Q}$. In conseguenza, per la dimensione abbiamo $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) \leq \dim(\mathbb{Q}) = 1$ e quindi $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 0$ oppure $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1$: siccome poi uno spazio vettoriale ha dimensione zero se e soltanto se contiene soltanto il vettore nullo, avremo allora che $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 0$ se $\text{Im}(\text{Tr}) = \{0\}$ e parallelamente $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1$ se esiste almeno un elemento $z \in \text{Im}(\text{Tr}) \setminus \{0\}$.

Ora, è immediato riconoscere che esistono senz'altro matrici $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})$ tali che $\text{Tr}(A) \neq 0$: ad esempio, per la matrice $A_{\bullet} := (a_{i,j})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, n}$ definita da $a_{1,1} := 1$ e $a_{i,j} := 0$ per ogni $(i, j) \neq (1, 1)$ si ha $\text{Tr}(A_{\bullet}) = 1 \neq 0$. Allora abbiamo

$$z := 1 = \text{Tr}(A_{\bullet}) \in \text{Im}(\text{Tr}) \setminus \{0\}$$

e quindi — per l'analisi precedente — possiamo concludere che $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1$.

(c) Dato che Tr è una funzione lineare, possiamo applicare il *Teorema della Dimensione* — o “del Rango” — che in questo caso ci assicura che

$$\dim(\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})) = \dim(\text{Ker}(\text{Tr})) + \dim(\text{Im}(\text{Tr})) = \dim(\text{Ker}(\text{Tr})) + \text{rg}(\text{Tr})$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$\dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = \dim(\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})) - \text{rg}(\text{Tr}) \quad (25)$$

A questo punto, osservando che $\dim(\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})) = n^2$ e che $\text{rg}(\text{Tr}) = 1$ — per il punto (b) — in forza della (25) possiamo concludere che $\dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = n^2 - 1$.