CdL in Informatica

GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018–2019

Esame scritto del 6 Settembre 2019 — Sessione Autunnale, I appello

N.B.: compilare il compito in modo <u>*sintetico*</u> *ma* **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

········· ∗ ·········

[1] — Si consideri la matrice $A := \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times2}(\mathbb{Q})$ e la funzione

$$T_A : Mat_{2\times2}(\mathbb{Q}) \longrightarrow Mat_{2\times2}(\mathbb{Q}) \quad , \qquad N \mapsto T_A(N) := A \cdot N$$

per ogni $N \in Mat_{2\times2}\big(\mathbb{Q}\big)$, dove "$\cdot$" indica il prodotto righe per colonne tra matrici. Infine, consideriamo la base

$$B := \left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; b_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; b_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; b_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dello spazio vettoriale $Mat_{2\times2}(\mathbb{Q})$.

(a) Determinare il valore del determinante $det\big(T_A(N)\big)$ per ogni $N \in Mat_{2\times2}(\mathbb{Q})$.

(b) Descrivere esplicitamente l'insieme $T_A\big(Mat_{2\times2}(\mathbb{Q})\big) \bigcap GL_2(\mathbb{Q})$.

(c) Verificare che la funzione T_A è lineare — dunque è un endomorfismo dello spazio vettoriale $V := Mat_{2\times2}(\mathbb{Q})$.

(d) Determinare la matrice M di forma 4×4 a coefficienti in $\mathbb{Q}$ canonicamente associata alla funzione lineare T_A rispetto alla base B di $Mat_{2\times2}(\mathbb{Q})$.

(e) Calcolare lo spettro $Sp(T_A)$ dell'endomorfismo T_A.

(f) Descrivere esplicitamente tutti gli autospazi (rispetto a ciascun autovalore) di T_A.

[2] — Nello spazio affine complesso tridimensionale $\mathcal{A}^3_{\mathbb{C}}$ si considerino i quattro punti $A := (1\,,0\,,0)$, $B := (0\,,1\,,0)$, $C := (2\,,1\,,3)$, $D := (1\,,-2\,,0)$, il piano π_{BCD} passante per i tre punti B, C e D, e le due rette ℓ_{AC}, ℓ_{BD}, passanti rispettivamente per i due punti A, C, e per i due punti B, D.

(a) Determinare equazioni parametriche del piano π_{BCD}.

(b) Determinare equazioni cartesiane del piano π_{BCD}.

(c) Determinare la mutua posizione delle due rette ℓ_{AC} e ℓ_{BD} — cioè se siano tra loro coincidenti, o parallele, o sghembe.

[3] — Sia $A \in Mat_{n\times n}\big(\mathbb{C}\big)$ una matrice quadrata di taglia $n\,(\in \mathbb{N}_+)$ per la quale esista un $N \in \mathbb{N}_+$ tale che $A^N = \mathbf{0}_{n\times n}$ (la *matrice nulla* — i cui coefficienti sono tutti 0 — di taglia $n \times n$). Dimostrare che:

(a) $det\,(A) = 0$;

(b) $Sp\,(A) = \{0\}$;

(c) $rg\,(A) \lneqq n$;

(d) la matrice $\big(I_n + A\big)$ è invertibile;

(e) A è diagonalizzabile $\iff$ $A = \mathbf{0}_{n\times n}$.

[4] — Nello spazio affine $\mathcal{A}^3_{\mathbb{R}}$ di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, si consideri il sottospazio affine $\mathcal{S}_k$, dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$, con equazioni cartesiane

$$\mathcal{S}_k : \begin{cases} k\,x \, + \, z \; = \; 3\,k \, + \, 2 \\ 8\,x \, - \, y \, + \, k^2\,z \; = \; -2 \\ 2k\,y \; = \; -k \end{cases}$$

(a) Determinare tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali sia $\mathcal{S}_k \neq \emptyset$.

(b) Per ogni $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{S}_k \neq \emptyset$, determinare la dimensione di $\mathcal{S}_k$.

[5] — Dato lo spazio vettoriale $V := Mat_{n\times n}\big(\mathbb{Q}\big)$ delle matrici quadrate di taglia $n\,(\in \mathbb{N}_+)$, si consideri la funzione

$$Tr\,:\,Mat_{n\times n}\big(\mathbb{Q}\big) \longrightarrow \mathbb{Q} \quad , \qquad A := \big(\,a_{ij}\,\big)_{i=1,\dots,n;}^{j=1,\dots,n;} \mapsto\; Tr\,(A) := \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

(a) Verificare che la funzione Tr è lineare.

(b) Calcolare $rg\,(Tr) \;:=\; dim\big(Im\,(Tr)\big)$;

(c) Calcolare $dim\big(Ker\,(Tr)\big)$.