CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA

prof. Fabio GAVARINI

a.a. 2018–2019

Esame scritto del 5 Luglio 2019 — Sessione Estiva, II appello

Testo & Svolgimento

..... * .....

[1] — Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$$

a coefficienti nel campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5\}$. Per ciascuno dei due casi possibili — cioè per $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ e per $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ si risolvano i seguenti quesiti.

(a) Determinare $\text{rg}(A)$.

(b) Determinare se la matrice A sia invertibile; in caso positivo se ne calcoli esplicitamente la matrice inversa, in caso negativo se ne calcoli esplicitamente il nucleo.

[2] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{C}^4$ si considerino i cinque vettori

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e siano $V' := \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ e $W := \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4, w)$ i due sottospazi vettoriali di V generati rispettivamente dai quattro vettori v_1, v_2, v_3, v_4 e dai cinque vettori v_1, v_2, v_3, v_4, w .

(a) Determinare la dimensione di V' .

(b) Determinare la dimensione di W .

(c) Determinare una base di V' .

(d) Determinare una base di W .

(e) Determinare se w appartenga al sottospazio V' . In caso affermativo, determinare una espressione esplicita di w come combinazione lineare dei quattro vettori v_1, v_2, v_3, v_4 ; in caso negativo, determinare una espressione esplicita di uno dei quattro vettori v_1, v_2, v_3, v_4 come combinazione lineare degli altri tre e di w .

[3] — Nello spazio affine $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^4$ di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, si considerino i due sottospazi affini $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$ descritti rispettivamente dalle equazioni cartesiane e equazioni parametriche seguenti:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_1 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_4 = 6 \end{cases}, \quad \mathcal{P} : \begin{cases} x_1 = h + 3k + 1 \\ x_2 = -3h + 5k + 2 \\ x_3 = -2k \\ x_4 = 2h + 4k - 1 \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R})$$

- (a) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{C}$.
- (b) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{P}$.
- (c) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$.
- (d) Determinare una descrizione esplicita — mediante equazioni parametriche o equazioni cartesiane — per $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$.

[4] — Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & -5 \\ 4 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in Mat_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$$

- (a) Determinare quali tra i numeri $-3, -1, 0, 2, 3, 4$ siano autovalori di M .
- (b) Determinare se la matrice M sia diagonalizzabile.

[5] — Siano $F : V \longrightarrow V$ e $G : V \longrightarrow V$ due endomorfismi dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che:

- (a) Se $v \in V$ è simultaneamente autovettore di F con autovalore λ e anche autovettore di G con autovalore μ , allora lo stesso v è anche autovettore per l'endomorfismo composto $F \circ G$ con autovalore $\lambda\mu$.
- (b) Se esiste una base di V in cui ciascun elemento sia simultaneamente autovettore per F e per G , allora si ha $F \circ G = G \circ F$.

— ★ —

SVOLGIMENTO

N.B.: lo svolgimento qui presentato è molto lungo... Questo non significa che lo svolgimento ordinario di tale compito (nel corso di un esame scritto) debba essere altrettanto lungo. Semplicemente, questo lo è perché si approfitta per spiegare — in diversi modi, con lunghe digressioni, ecc. ecc. — in dettaglio e con molti particolari tutti gli aspetti della teoria toccati più o meno a fondo dal testo in questione.

[1] — Rispondiamo ai diversi quesiti uno a uno, e in ciascuno affrontiamo sia il caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ che il caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

(a) Per calcolare il rango di una matrice possiamo procedere in due modi diversi.

Primo metodo — riduzione a scala: Un primo modo di calcolare il rango di una matrice è ridurla a scala, e poi contare il numero di pivot nella matrice a scala così ottenuta: tale numero sarà il rango della matrice iniziale. Applicando tale metodo alla matrice in esame otteniamo

$$\begin{aligned}
 A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} &\xrightarrow{1^a \text{ r.} \leftrightarrow 4^a \text{ r.}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{4^a \mapsto 4^a + 4 \cdot 1^a} \\
 &\xrightarrow{4^a \mapsto 4^a + 4 \cdot 1^a} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{2^a \text{ r.} \leftrightarrow 3^a \text{ r.}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} =: S
 \end{aligned}$$

dove la matrice finale S è a scala. Distinguiamo ora i due casi in esame:

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$: In questo caso la matrice a scala S ottenuta ha i quattro coefficienti sulla diagonale tutti non nulli, quindi essi sono proprio i pivot, in numero di quattro in totale, perciò il rango di A è $\text{rg}(A) = 4$.

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$: In questo caso la matrice a scala S ottenuta ha i primi tre coefficienti sulla diagonale non nulli, mentre l'ultimo è nullo, in quanto $10 = 0$ in $\mathbb{Z}_5$ (N.B.: dovremmo scrivere qualcosa come $\bar{z}$ per indicare la classe in $\mathbb{Z}_5$ di un intero $z \in \mathbb{Z}$, ma ne facciamo a meno per non appesantire la notazione). Così S ha esattamente tre pivot, e quindi il rango di A è $\text{rg}(A) = 3$.

Secondo metodo — applicazione del Teorema degli Orlati: Un secondo modo di calcolare il rango di una matrice è tramite il *Teorema degli Orlati*, il quale ci garantisce che, se troviamo una sottomatrice quadrata di taglia r che abbia determinante non nullo ma i cui orlati abbiano tutti determinante nullo, allora il rango della matrice è proprio r . Nel caso in esame, iniziamo a calcolare il determinante della matrice A assegnata: utilizzando (tra i tanti possibili) lo sviluppo di Laplace lungo la terza riga troviamo

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \\
 &= (-1) \cdot 1 \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot (4 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1)) = \\
 &= (-1) \cdot 1 \cdot (+1) \cdot (-1) \cdot 10 = 10
 \end{aligned}$$

così che $\det(A) = 10$. Distinguiamo ora i due casi in esame:

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$: In questo caso $\det(A) = 10 \neq 0$, quindi dal suddetto *Teorema degli Orlati* concludiamo che il rango di A è $\text{rg}(A) = 4$.

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$: In questo caso $\det(A) = 10 = 0$, quindi dal *Teorema degli Orlati* concludiamo che il rango di A è certamente minore di 4, ma ancora non sappiamo esattamente quanto sia. Si noti anche che in questo caso potevamo notare che $\text{rg}(A) \leq 4$ anche osservando che la matrice data si può riscrivere come

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui possiamo osservare che la prima colonna e la quarta sono una multipla dell'altra — si ottiene la quarta moltiplicando la prima per $3 \cdot 4^{-1} = 3 \cdot 4 = 12 = 2$ — oppure, più facilmente ancora, osservando che la prima riga e la quarta riga sono uguali. La circostanza relativa alle colonne ci garantisce che le quattro colonne di A sono tra loro linearmente indipendenti, quindi il rango di A (pensato come “rango-colonne”) è certamente minore di quattro; analogamente, l'osservazione fatta sulle righe ci garantisce che le quattro righe di A sono tra loro linearmente indipendenti, quindi il rango di A (pensato ora come “rango-righe”) è certamente minore di quattro.

Per sapere ora quanto esattamente sia il rango di A , osserviamo che la sottomatrice $A_{2,3,4}^{1,2,3}$ di A formata dalle righe 2, 3, 4, e dalle colonne 1, 2, 3, è una matrice quadrata di ordine 3 che ha determinante

$$\det(A_{2,3,4}^{1,2,3}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot ((-1) \cdot 1 \cdot (-1)) = -1 \neq 0$$

dunque in particolare $A_{2,3,4}^{1,2,3}$ è una sottomatrice quadrata di ordine 3 con determinante non nullo: perciò dal *Teorema degli Orlati* concludiamo che il rango di A è $\text{rg}(A) = 3$.

(b) Dobbiamo stabilire se la matrice A sia invertibile e, in caso positivo, calcolarne esplicitamente la matrice inversa, in caso negativo invece calcolarne il nucleo.

Dalla teoria generale, ricordiamo che una matrice quadrata è invertibile se e soltanto se il suo determinante è non nullo, oppure — equivalentemente — se ha rango massimo. Pertanto, da quanto già visto al punto (a) possiamo concludere che la matrice A è invertibile nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, mentre non è invertibile nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

Per procedere oltre però (cioè calcolare l'inversa nel primo caso, e calcolare il nucleo nel secondo caso) dobbiamo fare di più: a tal fine, seguiamo un metodo che in effetti stabilisce anche le premesse, cioè il calcolo del determinante e del rango di A — per cui seguendo questa procedura si fa tutto in un colpo solo...

Accostiamo alla destra della matrice A la matrice identità di ordine 4, ottenendo così una matrice $(A | I_4)$ di taglia 4×8 . Su tale matrice operiamo in modo da ridurre a scala la parte di sinistra, cioè la matrice A : a tal fine riprendiamo i calcoli fatti per il punto (a), estendoli però anche alla parte destra della matrice $(A | I_4)$ e delle sue successive trasformazioni. In tal modo otteniamo

$$(A | I_4) := \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a \text{ riga} \leftrightarrow 4^a \text{ riga}}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{1^a \text{ riga} \leftrightarrow 4^a \text{ riga}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{4^a \text{ r.} \mapsto 4^a + 4 \cdot 1^a \text{ r.}} \\
& \xrightarrow{4^a \text{ r.} \mapsto 4^a + 4 \cdot 1^a \text{ r.}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{2^a \text{ r.} \leftrightarrow 3^a \text{ r.}} \\
& \xrightarrow{2^a \text{ r.} \leftrightarrow 3^a \text{ r.}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) =: (S | A')
\end{aligned}$$

dove nella matrice finale $(S | A')$ la parte di sinistra è proprio la matrice a scala S trovata al punto (a). A questo punto procediamo oltre distinguendo i due casi:

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$: Il calcolo appena fatto (come già prima...) ci mostra che la matrice S è non singolare, cioè ha rango massimo, e quindi determinante non nullo. Dunque questo vale anche per A , quindi A è invertibile. Per calcolare la matrice inversa A^{-1} ripartiamo dalla matrice $(S | A')$ e lavoriamo su di essa facendo una eliminazione di Gauss all'insù fino a ridurla a forma diagonale; i calcoli espliciti danno

$$\begin{aligned}
(S | A') & := \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a \text{ r.} \mapsto 1^a + (-3/10) \cdot 4^a \text{ r.}} \\
& \xrightarrow{1^a \text{ r.} \mapsto 1^a + (-3/10) \cdot 4^a \text{ r.}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -3/10 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) =: (D | A'')
\end{aligned}$$

dove D è la matrice diagonale 4×4 la cui diagonale è $(d_1, d_2, d_3, d_4) := (-1, 1, -1, 10)$. Come ultimo passo operiamo sulla matrice $(D | A'')$ dividendone ciascuna riga per il coefficiente della medesima riga nella diagonale di D : otteniamo così

$$\begin{aligned}
(D | A'') & := \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -3/10 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{i^a \text{ r.} \mapsto d_i^{-1} \cdot i^a \text{ r.} \\ \forall i \in \{1,2,3,4\}}} \\
& \xrightarrow{\substack{i^a \text{ r.} \mapsto d_i^{-1} \cdot i^a \text{ r.} \\ \forall i \in \{1,2,3,4\}}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/10 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & 0 & 0 & 2/5 \end{array} \right) =: (I_4 | A^\vee = A^{-1})
\end{aligned}$$

dove nella matrice finale la parte di destra $A^\vee$ è proprio la matrice A^{-1} inversa di A richiesta. Come controprova, possiamo calcolare i prodotti righe per colonne $A \cdot A^\vee$ e $A^\vee \cdot A$ e verificare così che sia $A \cdot A^\vee = I_4$ e $A^\vee \cdot A = I_4$ (in realtà, è sufficiente fare

soltanto una delle due verifiche), per cui è proprio $A^\vee = A^{-1}$. Pertanto concludiamo che la matrice A^{-1} inversa di A è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/10 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/10 & 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

In alternativa, il calcolo di A^{-1} si può anche fare con l'uso della *formula diretta* (he in questo caso dovrebbe essere più semplice del solito perché la matrice A in esame è ricca di zeri...). Tale formula esplicita è

$$A^{-1} = \left((-1)^{i+j} \det(A_j^i) \det(A)^{-1} \right)_{i=1,2,3,4; j=1,2,3,4} \quad (2)$$

dove A_j^i è la sottomatrice quadrata 3×3 di A ottenuta cancellando la riga j e la colonna i , il cui determinante può essere calcolato con la regola di Sarrus (o in altro modo; comunque sarà semplice perché si tratta di matrici "piccole"). Ora, per calcolare la (2) sappiamo già — dall'analisi fatta per il punto (a) — che $\det(A) = 10$ e quindi $\det(A)^{-1} = 10^{-1} = 1/10$; inoltre abbiamo

$$\det(A_1^1) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -(-1) \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

$$\det(A_4^1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(-2) \cdot (-1) \cdot 1 = -2$$

$$\det(A_1^4) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(-1) \cdot 1 \cdot (-1) = -1$$

$$\det(A_2^3) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1 \cdot (-1) = 12 - 2 = 10$$

$$\det(A_3^2) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1) \cdot 3 - (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) = -12 + 2 = -10$$

$$\det(A_4^4) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -4 \cdot (-1) \cdot 1 = 4$$

mentre in tutti gli altri casi si trova $\det(A_j^i) = 0$. Infine, inserendo questi valori nella (2) si ritrova nuovamente l'espressione (1) per l'inversa A^{-1} di A .

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$: In questo caso il calcolo fatto al punto (a) per ridurre a scala la matrice A ci ha dato

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: S$$

Ora, calcolare il nucleo di A significa risolvere il sistema lineare omogeneo $\otimes_A : A \underline{x} = \underline{0}$, il quale è equivalente al sistema $\otimes_S : S \underline{x} = \underline{0}$ — in forza della riduzione a scala di A in S — in altri termini abbiamo l'uguaglianza di nuclei $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(S)$. I calcoli danno

$$\begin{aligned} \otimes_A : A \underline{x} = \underline{0} &\iff \otimes_S : S \underline{x} = \underline{0} \iff \otimes_S : \begin{cases} -x_1 + 3x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} -x_1 + 3x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 3x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t \end{cases} \quad (\forall t \in \mathbb{Z}_5) \end{aligned}$$

da cui concludiamo che *il nucleo di A è*

$$\text{Ker}(A) = \{(3t, 0, 0, t) \mid t \in \mathbb{Z}_5\}$$

[2] — Possiamo affrontare i diversi quesiti posti trattandoli tutti simultaneamente. A tal fine, consideriamo le matrici

$$\begin{aligned} M_{V'} &:= (v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \\ M_W &:= (v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4 \mid w) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & -7 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dalla teoria generale sappiamo che

$$\dim(V') = \text{rg}(M_{V'}) \quad , \quad \dim(W) = \text{rg}(M_W) \quad (3)$$

e inoltre, se riduciamo a scala la matrice $M_{V'}$ — rispettivamente M_W — ottenendo una matrice a scala $S_{V'}$ — rispettivamente S_W — allora i vettori colonna di $M_{V'}$ — rispettivamente di M_W — nelle posizioni di colonna in cui si trovano i pivot della matrice a scala $S_{V'}$ — rispettivamente S_W — formano una base per V' — rispettivamente per W .

Pertanto procediamo a ridurre a scala $M_{V'}$ e M_W : siccome poi la seconda matrice è ottenuta dalla prima aggiungendo un'ulteriore colonna a destra, in effetti possiamo fare la riduzione a scala di M_W e *dedurne* (senza ulteriori calcoli) anche la riduzione a scala

per $M_{V'}$. Procedendo con i calcoli espliciti otteniamo

$$\begin{aligned}
M_W &:= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -1 & -7 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a \leftrightarrow 3^a} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -7 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3^a \mapsto 3^a + 2 \cdot 1^a \\ 4^a \mapsto 4^a + 3 \cdot 1^a}} \\
&\xrightarrow{\substack{3^a \mapsto 3^a + 2 \cdot 1^a \\ 4^a \mapsto 4^a + 3 \cdot 1^a}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & -7 & -7 & -7 & -14 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3^a \mapsto 3^a + 7/2 \cdot 2^a \\ 4^a \mapsto 4^a + 7/2 \cdot 2^a}} \\
&\xrightarrow{\substack{3^a \mapsto 3^a + 7/2 \cdot 2^a \\ 4^a \mapsto 4^a + 7/2 \cdot 2^a}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) =: (S_{V'} | c_w) =: S_W
\end{aligned}$$

dove nell'ultima riga introduciamo la notazione

$$S_{V'} := \left(\begin{array}{cccc} -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad S_W := \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (4)$$

Ora, nella matrice a scala $S_{V'}$ i pivot sono tre, perciò $rg(M_{V'}) = rg(S_{V'}) = 3$ e quindi grazie alla (3) concludiamo che $dim(V') = 3$: questo risponde al quesito (a).

Analogamente, nella matrice a scala S_W i pivot sono tre, perciò $rg(M_W) = rg(S_W) = 3$ e quindi per la (3) concludiamo che $dim(W) = 3$: questo risponde al quesito (b).

Inoltre, nella matrice a scala $S_{V'}$ i tre pivot stanno nelle colonne 1, 2 e 3, perciò per quanto già ricordato possiamo concludere che *una base di V' è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$* : questo risponde al quesito (c).

Analogamente, nella matrice a scala S_W i tre pivot stanno nelle colonne 1, 2 e 3, e quindi abbiamo di nuovo che *una base di W è data da $\{v_1, v_2, v_3\}$* : questo risponde al quesito (d).

Infine, per il punto (e) abbiamo che $V' = W$ perché $V' \subseteq W$ per definizione e inoltre $dim(V') = 3 = dim(W)$; pertanto $w \in W = V'$ e così concludiamo che *w appartiene al sottospazio V'* . Per finire quindi ci resta soltanto da determinare una espressione esplicita di w come combinazione lineare dei quattro vettori v_1, v_2, v_3, v_4 .

Esplicitamente, dobbiamo trovare quattro scalari $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ tali che

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = w \quad (5)$$

A sua volta, questa equazione riscritta esplicitamente è

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che — identificando componente a componente — corrisponde a quattro equazioni lineari che formano il seguente sistema

$$\textcircled{*} : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases} \quad (6)$$

la cui matrice completa è M_W . Per risolvere quest'ultimo lo riduciamo a scala, il che significa ridurre a scala la matrice M_W : dai calcoli già svolti otteniamo la matrice a scala S_W , il cui sistema lineare associato — equivalente a quello in (6) — è

$$\textcircled{*}' : \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_3 + 12x_4 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Tale sistema è compatibile, cioè ammette soluzioni, perché la matrice dei coefficienti $S_{V'}$ e la matrice completa S_W hanno lo stesso rango (che è 3); inoltre, poiché il rango è 3 e il numero di variabili è 4, lo spazio delle soluzioni — che è un sottospazio affine in $\mathbb{C}^4$ — ha dimensione $4 - 3 = 1$. Per calcolare tali soluzioni, osserviamo che i tre pivot della matrice dei coefficienti $S_{V'}$ del sistema $\textcircled{*}'$ stanno nelle colonne 1, 2 e 3, cioè figurano davanti alle variabili x_1 , x_2 e x_3 : la rimanente variabile x_4 è l'unica variabile libera, e come tale possiamo prenderla come parametro. Procediamo allora a risolvere il sistema $\textcircled{*}'$ in (7) — e quindi il sistema iniziale $\textcircled{*}$ in (6) — come segue:

$$\begin{aligned} \textcircled{*}' : \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_3 + 12x_4 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2t = 4 \\ 4x_3 + 12t = 4 \\ x_4 = t \quad (\in \mathbb{C}) \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} -x_1 = -5 + 3x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 = 4 - 2t - 2x_3 \\ 4x_3 = 4 - 12t \\ x_4 = t \quad (\in \mathbb{C}) \end{cases} \implies \begin{cases} -x_1 = -5 + 3x_2 + 2(1 - 3t) \\ 2x_2 = 4 - 2t - 2(1 - 3t) \\ x_3 = 1 - 3t \\ x_4 = t \quad (\in \mathbb{C}) \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} x_1 = 5 - 3x_2 - 2(1 - 3t) \\ x_2 = 2 - t - (1 - 3t) \\ x_3 = 1 - 3t \\ x_4 = t \quad (\in \mathbb{C}) \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 5 - 3(1 + 2t) - 2(1 - 3t) \\ x_2 = 1 + 2t \\ x_3 = 1 - 3t \\ x_4 = t \quad (\in \mathbb{C}) \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 + 2t \\ x_3 = 1 - 3t \\ x_4 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

quindi in conclusione l'insieme delle soluzioni del sistema $\circledast$ in (6) è

$$\{(0, 1+2t, 1-3t, t) \mid t \in \mathbb{C}\}$$

perciò — tornando al quesito in (a) — otteniamo in definitiva che *le espressioni di w come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3 e v_4 sono tutte e sole della forma*

$$w = (1+2t)v_2 + (1-3t)v_3 + tv_4 \quad \forall t \in \mathbb{C} .$$

[3] — Affrontiamo i vari quesiti uno per uno.

(a) Per definizione, la dimensione di un sottospazio affine $\mathcal{S}$ in $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$ è la dimensione $\dim(V_{\mathcal{S}})$ dello spazio di giacitura $V_{\mathcal{S}}$ di $\mathcal{S}$, che è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$, precisamente l'unico che — come sottospazio affine di $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$ — è parallelo a e passa per l'origine O delle coordinate. Quando $\mathcal{S}$ è descritto tramite equazioni cartesiane — come è il caso in esame di $\mathcal{S} := \mathcal{C}$ — della forma $\circledast_{\mathcal{S}} : A\underline{x} = \underline{b}$, lo spazio di giacitura $V_{\mathcal{S}}$ di $\mathcal{S}$ è semplicemente il nucleo $\text{Ker}(A)$ della matrice dei coefficienti nelle equazioni cartesiane $\circledast_{\mathcal{S}}$. Quindi abbiamo

$$\dim(\mathcal{S}) = \dim(V_{\mathcal{S}}) = \dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rg}(A) \quad (8)$$

dove nella seconda identità abbiamo usato il *Teorema della Dimensione*.

Ora, nel caso in esame di $\mathcal{S} := \mathcal{C}$ abbiamo $n = 4$ e

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 20 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

dove abbiamo operato la riduzione a scala

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 20 & 7 \end{pmatrix}$$

e abbiamo osservato che l'ultima matrice ha esattamente due pivot; perciò la (8) ci dà

$$\dim(\mathcal{C}) = 2$$

(b) Riprendiamo la notazione introdotta al punto (a) per un sottospazio affine $\mathcal{S}$ in $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$. Quando $\mathcal{S}$ è descritto tramite equazioni parametriche — come è il caso in esame di $\mathcal{S} := \mathcal{P}$ — della forma $\circledast_{\mathcal{S}} : \underline{x} = \underline{p} + t_1 \underline{v}^{(1)} + \dots + t_r \underline{v}^{(d)}$, lo spazio di giacitura $V_{\mathcal{S}}$ di $\mathcal{S}$ è semplicemente il sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dai *vettori di giacitura* $\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(d)}$; ma tali vettori di giacitura sono tra loro linearmente indipendenti, perciò

$$\dim(\mathcal{S}) = \dim(V_{\mathcal{S}}) = \dim(\text{Span}(\underline{v}^{(1)}, \dots, \underline{v}^{(d)})) = d \quad (9)$$

in sintesi, *la dimensione di $\mathcal{S}$ è il numero di parametri che compaiono nelle sue equazioni parametriche*. Nel caso in esame di $\mathcal{S} := \mathcal{P}$ le equazioni parametriche hanno esattamente due parametri — indicati con h e k — quindi dalla (9) concludiamo che

$$\dim(\mathcal{P}) = 2$$

(c)–(d) Gli ultimi due punti conviene discuterli insieme. Procediamo infatti a determinare una descrizione esplicita per $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ — sia tramite equazioni parametriche che tramite equazioni cartesiane — e da tale descrizione dedurremo in particolare la dimensione di $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$.

Dato che $\mathcal{C}$ è descritto da equazioni parametriche mentre $\mathcal{P}$ è descritto da equazioni parametriche, possiamo ottenere facilmente una descrizione esplicita di $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$: infatti, i punti di $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ si trovano sostituendo le espressioni parametriche per le coordinate dei punti di $\mathcal{P}$ nelle equazioni cartesiane di $\mathcal{C}$. I calcoli espliciti danno

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} \cap \mathcal{P} : & \begin{cases} x_1 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_4 = 6 \\ x_1 = h + 3k + 1 \\ x_2 = -3h + 5k + 2 \\ x_3 = -2k \\ x_4 = 2h + 4k - 1 \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R}) \implies \\
& \implies \begin{cases} (h+3k+1) - 4(-2k) - 2(2h+4k-1) = 3 \\ 5(h+3k+1) - (-3h+5k+2) - 3(2h+4k-1) = 6 \\ x_1 = h + 3k + 1 \\ x_2 = -3h + 5k + 2 \\ x_3 = -2k \\ x_4 = 2h + 4k - 1 \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R}) \implies \\
& \implies \begin{cases} -3h+3k = 0 \\ 2h-2k = 0 \\ x_1 = h + 3k + 1 \\ x_2 = -3h + 5k + 2 \\ x_3 = -2k \\ x_4 = 2h + 4k - 1 \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R}) \implies \begin{cases} h = k \quad (=:\ell) \\ x_1 = h + 3k + 1 \\ x_2 = -3h + 5k + 2 \\ x_3 = -2k \\ x_4 = 2h + 4k - 1 \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R}) \implies \\
& \implies \begin{cases} x_1 = 4\ell + 1 \\ x_2 = 2\ell + 2 \\ x_3 = -2\ell \\ x_4 = 6\ell - 1 \end{cases} \quad (\ell \in \mathbb{R}) \implies \begin{cases} x_1 = 2t + 1 \\ x_2 = t + 2 \\ x_3 = -t \\ x_4 = 3t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

(dove nell'ultimo passaggio abbiamo semplicemente cambiato parametro per avere espressioni un po' più semplici!), da cui otteniamo per $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ le equazioni parametriche

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{P} : \begin{cases} x_1 = 2t + 1 \\ x_2 = t + 2 \\ x_3 = -t \\ x_4 = 3t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{10}$$

il che risponde al quesito (d). In tali equazioni parametriche compare un solo parametro, e quindi la dimensione di $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ è $\dim(\mathcal{C} \cap \mathcal{P}) = 1$, il che risponde al quesito (c).

Sempre per rispondere al quesito (c), vediamo ora di ottenere anche una descrizione di $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ mediante equazioni cartesiane, ricavandole dalle equazioni parametriche in (10). A tal fine, bisogna ricavare da queste ultime un sistema di equazioni lineari nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4 , eliminandone il parametro ℓ .

Ricordiamo il metodo “standard” che possiamo seguire in questi casi. Dato un sottospazio affine $\mathcal{S}$ descritto da equazioni parametriche, queste ultime si possono scrivere (in “modalità compatta”) nella forma matriciale

$$\mathcal{S} : \underline{x} = A\underline{t} + \underline{x}_0 \quad (\forall \underline{t} \in \mathbb{K}^d) \quad (11)$$

dove $\underline{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ indica la stringa delle coordinate di un punto nello spazio affine n -dimensionale $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$, con $\underline{t} := (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{K}^d$ indichiamo la stringa dei d parametri (indipendenti) coinvolti nelle equazioni parametriche, e $d := \dim(\mathcal{S})$, la $A \in \text{Mat}_{d \times n}(\mathbb{K})$ è una matrice $d \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. e infine $\underline{x}_0 \in \mathbb{K}^n$ è il punto di $\mathcal{S}$ che si ottiene dalla (11) per $\underline{t} = \underline{0}$. Il significato delle equazioni parametriche in (11) è che $\mathcal{S}$ è il sottoinsieme dei punti $\underline{x}$ in $\mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$ dati dalla (11) al variare di $\underline{t} \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^d$: dunque per ogni $\underline{x} \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^n$ abbiamo

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \exists \underline{t} \in \mathcal{A}_{\mathbb{K}}^d : \underline{x} = A\underline{t} + \underline{x}_0$$

e riformulando l’ultima condizione otteniamo

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \exists \text{ una soluzione del sistema lineare (in } t_1, \dots, t_d) \otimes_x : A\underline{t} = \underline{x} - \underline{x}_0 \quad (12)$$

Ora, sappiamo che un sistema lineare ha soluzioni se e soltanto se il rango della sua matrice dei coefficienti è uguale al rango della sua matrice completa: pertanto dalla (12) otteniamo

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A | \underline{x} - \underline{x}_0) \quad (13)$$

Ora, operando sulla matrice completa $(A | \underline{x} - \underline{x}_0)$ per ridurne a scala la parte di sinistra — cioè la A — si ottiene una matrice della forma $(S | \underline{f}(\underline{x} - \underline{x}_0))$ dove S è una riduzione a scala di A e $\underline{f}(\underline{x} - \underline{x}_0)$ indica una colonna di n equazioni lineari in $\underline{x} - \underline{x}_0$, diciamo $f_1(\underline{x} - \underline{x}_0), \dots, f_n(\underline{x} - \underline{x}_0)$. Allora avremo

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A | \underline{x} - \underline{x}_0) \iff \odot_{\mathcal{S}} : \begin{cases} f_i(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \\ \forall i = n - \text{rg}(A) + 1, \dots, n; \end{cases}$$

e quindi in conclusione la (13) diventa

$$\underline{x} \in \mathcal{S} \iff \odot_{\mathcal{S}} : \begin{cases} f_i(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \\ \forall i = n - \text{rg}(A) + 1, \dots, n; \end{cases} \quad (14)$$

così che il sistema $\odot_{\mathcal{S}} : \begin{cases} f_i(\underline{x} - \underline{x}_0) = 0 \\ \forall i = n - \text{rg}(A) + 1, \dots, n; \end{cases}$ ci dà equazioni cartesiane per $\mathcal{S}$.

Applichiamo dunque tutto questo al caso di $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$: come equazioni parametriche (11) abbiamo le (10), e quindi la matrice completa $(A | \underline{x} - \underline{x}_0)$ che compare in (13) è

$$(A | \underline{x} - \underline{x}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 2 & x_1 - 1 \\ 1 & x_2 - 2 \\ -1 & x_3 \\ 3 & x_4 + 1 \end{array} \right)$$

di cui ora riduciamo a scala la parte di sinistra, come segue:

$$(A|\underline{x}-\underline{x}_0) = \left(\begin{array}{c|c} 2 & x_1-1 \\ 1 & x_2-2 \\ -1 & x_3 \\ 3 & x_4+1 \end{array} \right) \xrightarrow{1^a \leftrightarrow 2^a} \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_2-2 \\ 2 & x_1-1 \\ -1 & x_3 \\ 3 & x_4+1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 2^a \mapsto 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a \mapsto 3^a + 1 \cdot 1^a \\ 4^a \mapsto 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_2-2 \\ 0 & x_1-2x_2+1 \\ 0 & x_2+x_3-2 \\ 0 & -3x_2+x_4+7 \end{array} \right)$$

e da questo otteniamo che le equazioni cartesiane per $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ come in (14) sono

$$\odot_{\mathcal{C} \cap \mathcal{P}} : \begin{cases} x_2 - 2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \\ -3x_2 + x_4 + 7 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

In alternativa, un altro possibile modo di procedere è il seguente: dalle equazioni parametriche del sottospazio affine in esame — in questo caso $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ — eliminiamo tutti i parametri, come segue

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{P} : \begin{cases} x_1 = 2t + 1 \\ x_2 = t + 2 \\ x_3 = -t \\ x_4 = 3t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \implies \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 1 \\ x_2 = -x_3 + 2 \\ t = -x_3 \\ x_4 = -3x_3 - 1 \end{cases} \quad (\ell \in \mathbb{R}) \implies \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

quindi per $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ troviamo le equazioni cartesiane

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{P} : \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases} \quad (16)$$

Notiamo che le equazioni cartesiane in (16) sono *diverse* da quelle in (15): ma questo è sempre possibile — le equazioni cartesiane *non sono* univocamente determinate dal sottospazio affine che descrivono! D'altra parte si può facilmente verificare che i due sistemi lineari in (15) e in (16) sono *equivalenti* — anche se diversi — cioè i loro sistemi di soluzioni (cioè proprio i sottospazi affini che essi descrivono!) sono uguali.

In ogni caso, per verificare che le equazioni cartesiane in (16) siano corrette (cioè descrivano effettivamente il sottospazio affine $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$), dobbiamo controllare che:

— (1) sostituendo in (16) le espressioni parametriche in (10) si ottengono delle identità: infatti, questo dimostrerà che il sottospazio affine descritto dalle equazioni parametriche in (10) è contenuto in quello descritto dalle equazioni cartesiane in (16);

— (2) la dimensione del sottospazio affine descritto dalle equazioni cartesiane in (16) è 1, dunque è uguale a quella del sottospazio descritto dalle espressioni parametriche in (10): insieme all'inclusione garantita da (1) qui sopra, ciò proverà che i due sottospazi affini descritti in (10) e in (16) effettivamente coincidono.

Il punto (1) si verifica tramite calcoli diretti: sostituendo le (10) nelle (16) troviamo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_4 + 3x_3 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} (4\ell + 1) + 2(-2\ell) = 1 \\ (2\ell + 2) + (-2\ell) = 2 \\ (6\ell - 1) + 3(-2\ell) = -1 \end{cases} \quad (\ell \in \mathbb{R}) \implies \begin{cases} 1 = 1 \\ 2 = 2 \\ -1 = -1 \end{cases} \quad (\ell \in \mathbb{R})$$

e quindi effettivamente troviamo tutte identità, q.e.d.

Il punto (2) si verifica calcolando la dimensione del sottospazio affine descritto dalle equazioni cartesiane in (16), che — come spiegato al punto (a) — è uguale alla dimensione n dello spazio affine ambiente (in questo caso $n = 4$) meno il rango della matrice dei coefficienti del sistema di equazioni cartesiane considerato. Quest'ultimo rango è

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

perché la matrice è a scala con tre pivot. Perciò la dimensione cercata è $4 - 3 = 1$, q.e.d.

In alternativa, possiamo ricavare equazioni cartesiane di $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ mettendo a sistema equazioni cartesiane di $\mathcal{C}$ — che abbiamo già — con equazioni cartesiane di $\mathcal{P}$ — che invece dobbiamo trovare. Iniziamo quindi a ottenere equazioni cartesiane di $\mathcal{P}$ ricavandole dalle equazioni parametriche assegnate. A tal fine, procediamo analogamente a quanto fatto sopra nel caso di $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$. Con il “metodo standard”, la matrice completa $(A | \underline{x} - \underline{x}_0)$ che figura in (13) sarà data da

$$(A | \underline{x} - \underline{x}_0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 - 1 \\ -3 & 5 & x_2 - 2 \\ 0 & -2 & x_3 \\ 2 & 4 & x_4 + 1 \end{array} \right)$$

e di questa riduciamo a scala la parte di sinistra, come segue:

$$\begin{aligned} (A | \underline{x} - \underline{x}_0) &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 - 1 \\ -3 & 5 & x_2 - 2 \\ 0 & -2 & x_3 \\ 2 & 4 & x_4 + 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2^a \mapsto 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 4^a \mapsto 4^a - 2 \cdot 1^a}} \\ &\xrightarrow{\substack{2^a \mapsto 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 4^a \mapsto 4^a - 2 \cdot 1^a}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 - 1 \\ 0 & 14 & 3x_1 + x_2 - 5 \\ 0 & -2 & x_3 \\ 0 & -2 & -2x_1 + x_4 + 3 \end{array} \right) \xrightarrow{2^a \leftrightarrow 3^a} \\ &\xrightarrow{2^a \leftrightarrow 3^a} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 - 1 \\ 0 & -2 & x_3 \\ 0 & 14 & 3x_1 + x_2 - 5 \\ 0 & -2 & -2x_1 + x_4 + 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3^a \mapsto 3^a + 7 \cdot 2^a \\ 4^a \mapsto 4^a - 1 \cdot 2^a}} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} 3^a \mapsto 3^a + 7 \cdot 2^a \\ 4^a \mapsto 4^a - 1 \cdot 2^a \end{matrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x_1 - 1 \\ 0 & -2 & x_3 \\ 0 & 0 & 3x_1 + x_2 + 7x_3 - 5 \\ 0 & 0 & -2x_1 - x_3 + x_4 + 3 \end{array} \right)$$

e da questo otteniamo che le equazioni cartesiane per $\mathcal{P}$ come in (14) sono

$$\odot_{\mathcal{P}} : \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 - 5 = 0 \\ -2x_1 - x_3 + x_4 + 3 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

In alternativa, possiamo procedere (più liberamente) ad una “eliminazione” diretta dei due parametri h e k come segue

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \begin{cases} x_1 = h + 3k + 1 \\ x_2 = -3h + 5k + 2 \\ x_3 = -2k \\ x_4 = 2h + 4k - 1 \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R}) &\implies \begin{cases} h = x_1 - 3k - 1 \\ x_2 = -3h + 5k + 2 \\ k = -2^{-1}x_3 \\ x_4 = 2h + 4k - 1 \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} x_2 = -3(x_1 - 3(-2^{-1}x_3) - 1) + 5(-2^{-1}x_3) + 2 \\ x_4 = 2(x_1 - 3(-2^{-1}x_3) - 1) + 4(-2^{-1}x_3) - 1 \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} x_2 = -3x_1 + 9(-2^{-1}x_3) + 3 + 5(-2^{-1}x_3) + 2 \\ x_4 = 2x_1 - 6(-2^{-1}x_3) - 2 + 4(-2^{-1}x_3) - 1 \end{cases} \implies \\ &\implies \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

quindi per $\mathcal{P}$ troviamo le equazioni cartesiane

$$\mathcal{P} : \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases} \quad (18)$$

Per controllare che queste siano corrette, dobbiamo fare le stesse verifiche svolte per il caso di $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ con le equazioni (16), in due passi: la cosa è semplice e va a finire bene... D'altra parte, il confronto diretto ci mostra che il sistema lineare in (18) è quasi uguale a quello in (17), in particolare sono senz'altro equivalenti: quindi le equazioni parametriche che abbiamo trovato con questo metodo sono essenzialmente le stesse che avevamo già ottenute col metodo standard.

A questo punto, mettendo a sistema le equazioni cartesiane già assegnate per $\mathcal{C}$ con le equazioni cartesiane (17) o (18) trovate per $\mathcal{P}$ otteniamo per $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ le equazioni cartesiane

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{P} : \begin{cases} x_1 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases} \quad (19)$$

Notiamo infine che le equazioni cartesiane (19) per il sottospazio affine $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ sono diverse da quelle in (15) e da quelle in (16); ricordiamo che ciò è sempre possibile, in quanto la descrizione tramite equazioni cartesiane (o anche parametriche) non è mai unica.

[4] — Affrontiamo separatamente i due quesiti posti.

(a) Ricordiamo che gli autovalori di una matrice quadrata M sono tutte e sole le radici del suo polinomio caratteristico $p_M(x)$. Pertanto, andiamo a determinare $p_M(x)$ e poi verifichiamo quali tra i numeri $-3, -1, 0, 2, 3, 4$ ne siano radici.

Per definizione di “polinomio caratteristico” abbiamo

$$\begin{aligned} p_M(x) &:= \det(M - x I_3) = \det \begin{pmatrix} 6-x & -3 & -6 \\ 5 & -3-x & -5 \\ 4 & -3 & -4-x \end{pmatrix} = \\ &= (6-x) \cdot (-3-x) \cdot (-4-x) + (-3) \cdot (-5) \cdot 4 + 5 \cdot (-3) \cdot (-6) - \\ &\quad - (-6) \cdot (-3-x) \cdot 4 - (-3) \cdot 5 \cdot (-4-x) - (-5) \cdot (-3) \cdot (6-x) = \\ &= -x^3 - x^2 + 6x \end{aligned}$$

cioè

$$p_M(x) = -x^3 - x^2 + 6x \quad (20)$$

Ora il calcolo diretto ci dà, dalla (20),

$$p_M(-3) = 27 - 9 - 18 = 0 \implies -3 \text{ è autovalore di } M \quad (21)$$

$$p_M(-1) = 1 - 1 - 6 = -6 \neq 0 \implies -3 \text{ non è autovalore di } M$$

$$p_M(0) = -0 - 0 - 0 = 0 \implies -3 \text{ è autovalore di } M \quad (22)$$

$$p_M(2) = -8 - 4 + 12 = 0 \implies -3 \text{ è autovalore di } M \quad (23)$$

A questo punto possiamo arrestare i calcoli: infatti, le (21), (22) e (23) ci dicono che $-3, -1$ e 2 sono 3 diversi autovalori di M , la quale è una matrice quadrata di ordine e come tale non può avere più di 3 autovalori (distinti); pertanto $-3, -1$ e 2 sono tutti gli autovalori di M . Questo risponde al quesito (a).

(b) Nel trattare il punto (a) abbiamo visto che la matrice M ha esattamente 3 autovalori distinti, dove 3 è anche l'ordine di tale matrice (quadrata). Ne segue allora automaticamente che M ha esattamente 3 autospazi distinti, ciascuno di dimensione 1, e prendendo un elemento non nullo in ciascuno di tali autospazi si ottiene complessivamente una base di autovettori di M , dunque M è diagonalizzabile.

[5] — Trattiamo separatamente i due quesiti. In particolare, si può rispondere al secondo assumendo che il punto (a) sia effettivamente vero (anche se non lo si è dimostrato).

(a) Sia dato un $v \in V$ che è simultaneamente autovettore di F , con autovalore λ , e anche autovettore di G , con autovalore μ : questo significa, per definizione di “autovalore” e “autovettore”, che

$$F(v) = \lambda v \quad , \quad G(v) = \mu v$$

Ma allora da questo segue che

$$(F \circ G)(v) = F(G(v)) = F(\mu v) = \mu F(v) = \mu \lambda v = \lambda \mu v$$

il che a sua volta significa esattamente che v è autovettore per $F \circ G$ con autovalore $\lambda \mu$.

(b) Per ipotesi esiste una base $B = \{v_i\}_{i \in I}$ di V in cui ogni elemento v_i è autovettore di F con autovalore λ_i e anche autovettore di G con autovalore μ_i (per ogni $i \in I$). Dal punto (a) sappiamo che

$$(F \circ G)(v_i) = \lambda_i \mu_i v_i \quad \forall i \in I \quad (24)$$

e d'altra parte possiamo invertire il ruolo di F e G , perciò vale anche che

$$(G \circ F)(v_i) = \mu_i \lambda_i v_i \quad \forall i \in I \quad (25)$$

Dato che $\lambda_i \mu_i = \mu_i \lambda_i$ (per ogni $i \in I$), mettendo insieme la (24) e la (25r) otteniamo che

$$(F \circ G)(v_i) = (G \circ F)(v_i) \quad \forall i \in I \quad (26)$$

e siccome $B = \{v_i\}_{i \in I}$ è una base di V possiamo dedurre dalla (26) che

$$(F \circ G)(v) = (G \circ F)(v) \quad \forall v \in V \quad (27)$$

Infatti, ogni $v \in V$ si scrive come combinazione lineare degli elementi di B , cioè nella forma $v = \sum_{i \in I} c_i v_i$ per opportuni scalari $c_i \in \mathbb{K}$; allora

$$\begin{aligned} (F \circ G)(v) &= (F \circ G)\left(\sum_{i \in I} c_i v_i\right) = \sum_{i \in I} c_i (F \circ G)(v_i) \stackrel{\circledast}{=} \\ &\stackrel{\circledast}{=} \sum_{i \in I} c_i (G \circ F)(v_i) = (G \circ F)\left(\sum_{i \in I} c_i v_i\right) = (G \circ F)(v) \end{aligned}$$

dove per l'identità $\stackrel{\circledast}{=}$ abbiamo sfruttato la (26). Infine, la (27) che abbiamo appena dimostrato significa esattamente che $F \circ G = G \circ F$, q.e.d.