

CdL in Informatica
GEOMETRIA ed ALGEBRA
prof. Fabio GAVARINI
a.a. 2018–2019

Esame scritto del 5 Luglio 2019 — Sessione Estiva, II appello

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] — Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$$

a coefficienti nel campo $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_5\}$. Per ciascuno dei due casi possibili — cioè per $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ e per $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ — si risolvano i seguenti quesiti.

(a) Determinare $\text{rg}(A)$.

(b) Determinare se la matrice A sia invertibile; in caso positivo se ne calcoli esplicitamente la matrice inversa, in caso negativo se ne calcoli esplicitamente il nucleo.

[2] — Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{C}^4$ si considerino i cinque vettori

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad w := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e siano $V' := \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ e $W := \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4, w)$ i due sottospazi vettoriali di V generati rispettivamente dai quattro vettori v_1, v_2, v_3, v_4 e dai cinque vettori v_1, v_2, v_3, v_4, w .

(a) Determinare la dimensione di V' .

(b) Determinare la dimensione di W .

(c) Determinare una base di V' .

(d) Determinare una base di W .

(e) Determinare se w appartenga al sottospazio V' . In caso negativo, si spieghi dettagliatamente il perché; in caso affermativo, si determini una espressione esplicita di w come combinazione lineare dei quattro vettori v_1, v_2, v_3, v_4 .

[3] — Nello spazio affine $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}^4$ di dimensione 4 su $\mathbb{R}$, si considerino i due sottospazi affini $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$ descritti rispettivamente dalle equazioni cartesiane e equazioni parametriche seguenti:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_1 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - 3x_4 = 6 \end{cases}, \quad \mathcal{P} : \begin{cases} x_1 = h + 3k + 1 \\ x_2 = -3h + 5k + 2 \\ x_3 = -2k \\ x_4 = 2h + 4k - 1 \end{cases} \quad (h, k \in \mathbb{R})$$

- (a) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{C}$.
- (b) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{P}$.
- (c) Determinare la dimensione del sottospazio $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$.
- (d) Determinare una descrizione esplicita — mediante equazioni parametriche o equazioni cartesiane — per $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$.

[4] — Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & -5 \\ 4 & -3 & -4 \end{pmatrix} \in Mat_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$$

- (a) Determinare quali tra i numeri $-3, -1, 0, 2, 3, 4$ siano autovalori di M .
- (b) Determinare se la matrice M sia diagonalizzabile.

[5] — Siano $F : V \longrightarrow V$ e $G : V \longrightarrow V$ due endomorfismi dello spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che:

- (a) Se $v \in V$ è simultaneamente autovettore di F con autovalore λ e anche autovettore di G con autovalore μ , allora lo stesso v è anche autovettore per l'endomorfismo composto $F \circ G$ con autovalore $\lambda\mu$.
- (b) Se esiste una base di V in cui ciascun elemento sia simultaneamente autovettore per F e per G , allora si ha $F \circ G = G \circ F$.