

GEOMETRIA E ALGEBRA

C.d.L. Informatica - a.a. 2007-2008 --- prof. Fabio GAVARINI

Testo consigliato: Marco Abate, "Algebra lineare", McGraw-Hill Libri Italia, Milano, 2000

Programma del corso

Richiami di algebra: gruppi, anelli, campi.

Richiami di geometria euclidea: punti, rette e piani nello spazio euclideo; appartenenza, inclusione, incidenza, parallelismo, complanarita', rette sghembe.

Vettori orientati (applicati in un punto) nello spazio euclideo, nel piano, nella retta. Operazioni sui vettori applicati (in uno stesso punto); basi e coordinate per vettori applicati. Riferimenti affini nello spazio euclideo; coordinate.

Equazioni vettoriali di rette e di piani. Vettore direttore di una retta, vettori di giacitura di un piano. Equazioni parametriche di rette e di piani.

Definizione di spazio vettoriale su un campo; esempi vari. Sottospazi vettoriali: definizione, esempi, controesempi.

Combinazioni lineari. Il sottospazio generato - "*Span*" - da un numero finito di vettori dati in uno spazio vettoriale. Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale.

Dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Un insieme finito di vettori e' linearmente dipendente se e soltanto se uno di essi puo' essere espresso come combinazione lineare degli altri. Insiemi massimali di vettori linearmente indipendenti.

Base (finita) di uno spazio vettoriale. Coordinate di un vettore rispetto ad una base.

Ogni base e' un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti, e viceversa.

Teorema di esistenza (delle basi): Se uno spazio vettoriale V ha un sistema (finito) di generatori A , allora esiste un sottoinsieme B di A che e' base di V .

Teorema del completamento: Se uno spazio vettoriale V ha una base, ogni insieme di vettori linearmente indipendente puo' essere completato ad una base di V .

Teorema di equicardinalita' delle basi: Se uno spazio vettoriale ha una base (finita), allora tutte le sue basi hanno lo stesso numero di elementi.

Dimensione di uno spazio vettoriale (caso finito). Base canonica in K^n .

Matrici a coefficienti in un campo; righe e colonne. Operazioni vettoriali tra matrici. Matrici trasposte; proprieta' elementari dell'operazione di trasposizione.

Sistemi di equazioni lineari. Formulazione matriciale. Sistemi simultanei, equivalenti, omogenei, compatibili. Sistemi e matrici speciali: diagonali, triangolari, quadrati/e.

Criterio di risolubilita': Un sistema ammette soluzioni se e soltanto se la colonna dei termini noti e' combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.

Criterio di unicita': Un sistema compatibile ha una sola soluzione se e soltanto se le colonne della matrice dei coefficienti sono linearmente indipendenti.

Operazioni elementari su (le equazioni di) un sistema, o sulla sua matrice completa: equivalenza dei sistemi ottenuti mediante operazioni elementari. L'algoritmo di eliminazione di Gauss per sistemi lineari quadrati, o per matrici quadrate: i *pivot*.

Risoluzione di un sistema lineare quadrato nel caso triangolare: condizione di esistenza di soluzioni (e loro numero), e algoritmo costruttivo per trovarle.

Matrici singolari e matrici non-singolari (definizione tramite i pivot).

Teorema: Un sistema quadrato ha una e una sola soluzione se e soltanto se i suoi pivot (comunque ottenuti) sono tutti non nulli.

Teorema di struttura: L'insieme delle soluzioni di un sistema è la somma di una soluzione particolare con (l'insieme delle) soluzioni del sistema omogeneo associato.

Applicazioni lineari (o "omomorfismi") tra spazi vettoriali: definizione, proprietà elementari. Trasformazioni lineari invertibili ("isomorfismi"). Immagine $Im(f)$ e nucleo $Ker(f)$ di una trasformazione lineare f . Criteri di iniettività e suriettività in termini del nucleo e dell'immagine. Rango di una trasformazione lineare.

Teorema del rango (o "della dimensione"):

Se f da V a W è lineare, allora $rg(f) + \dim(Ker(f)) = \dim(V)$.

Corollario: Se f da V a W è lineare, e $\dim(V) = \dim(W)$, allora

f è iniettiva $\Leftrightarrow f$ è suriettiva $\Leftrightarrow f$ è biiettiva (=biunivoca)

La composizione di applicazioni lineari: definizione, linearità, associatività e distributività. Invertibilità di trasformazioni lineari. Condizione sulle dimensioni: se f (lineare) tra V e W è invertibile, allora V e W hanno la stessa dimensione.

Isomorfismo (vettoriale) tra applicazioni lineari e matrici, rispetto a basi fissate.

Prodotto righe per colonne tra matrici, come operazione corrispondente alla composizione di applicazioni lineari: associatività e distributività di tale prodotto.

Invertibilità di matrici quadrate, matrice inversa. Relazione con l'invertibilità e l'inversa delle applicazioni lineari associate. Il gruppo delle matrici invertibili.

Risoluzione di un sistema lineare quadrato non-singolare tramite l'uso della matrice inversa; esistenza e unicità della soluzione.

Risoluzione di un sistema lineare quadrato non-singolare tramite e.G. nei due sensi.

Rango-colonne e rango-righe di una matrice: definizione, maggiorazione. Uguaglianza tra rango-colonne di una matrice e rango dell'applicazione lineare associata. L'uguaglianza tra rango-righe e rango-colonne di una matrice (*senza dimostrazione*).

Teorema di Rouché-Capelli: Un sistema lineare ha soluzioni se e soltanto se i ranghi-colonne della sua matrice dei coefficienti e della sua matrice completa sono uguali. Tale soluzione - se esiste - è unica se e soltanto se il rango-colonne della matrice dei coefficienti è uguale al numero di incognite.

Matrici a scala e loro pivot; sistemi lineari a scala.

Lemma: Se S è una matrice a scala, e $j_1, \dots, j_r$ sono gli indici di colonna dei suoi pivot, allora le colonne $S^{j_1}, \dots, S^{j_r}$ di S formano una base di $Im(L_S)$. Inoltre $rg(L_S) = r$, e $Im(L_S) = \{ x \text{ in } K^l \mid x_{l-r+1} = \dots = x_l = 0 \}$.

Criterio di compatibilità di un sistema a scala. Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema a scala omogeneo. Riduzione a scala di un sistema.

Risoluzione (all'indietro) dei sistemi a scala; struttura dello spazio delle soluzioni.

Teorema: Se A è una matrice, S è una riduzione a scala di A , e $j_1, \dots, j_r$ sono gli indici di colonna dei pivot di S , allora le colonne $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ di A formano una base di $\text{Im}(L_A)$. In particolare, il rango di A è uguale al numero r dei pivot.

Sottospazi affini di K^n . Equazioni parametriche (=parametrizzazioni) ed equazioni cartesiane di sottoinsiemi di K^n . Il caso dei sottospazi vettoriali e dei sottospazi affini.

Condizioni equivalenti per l'invertibilità di una matrice quadrata: criteri sull'applicazione associata, criterio sul rango, criterio sulle colonne o sulle righe, criteri sull'esistenza e unicità di soluzioni per il sistema omogeneo associato o per un qualunque sistema associato, criterio sui pivot (in una qualsiasi riduzione a forma triangolare).

Criterio di invertibilità: una matrice quadrata è invertibile se e soltanto se è invertibile a destra o è invertibile a sinistra. Calcolo dell'inversa di una matrice non-singolare di ordine n , tramite soluzione di n sistemi con e.G. nei due sensi.

La funzione determinante: proprietà fondamentali, esistenza, unicità, formula di calcolo tramite riduzione a forma triangolare superiore. Formule esplicite per il determinante nei casi di ordine 1, 2, 3, nei casi diagonali, nei casi triangolari.

Sviluppi di Laplace (per riga o colonna) per il determinante (*senza dimostrazione*).

Una matrice quadrata e la sua trasposta hanno determinante uguale.

Teorema di Binet: La funzione determinante è moltiplicativa.

Corollario: una matrice quadrata è invertibile se e soltanto se ha determinante diverso da zero.

Teorema di Cramer: formula esplicita della soluzione di un sistema quadrato con matrice invertibile.

Teorema degli Orlati per il calcolo del rango di una matrice.

Autovettori, autovalori, autospazi e spettro di un endomorfismo. Indipendenza lineare di autovettori relativi ad autovalori distinti. La dimensione è un maggiorante per il numero totale di autovalori. Molteplicità geometrica di un autovalore.

Endomorfismi diagonalizzabili. Criterio di diagonalizzabilità in termini di autospazi (la loro somma è tutto lo spazio) e di molteplicità geometriche (la loro somma uguaglia la dimensione dello spazio).

Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata. Il polinomio caratteristico di un endomorfismo, definito come polinomio caratteristico della matrice che lo esprime rispetto ad una qualsiasi base (*senza dimostrare l'indipendenza dalla scelta della base*).

Calcolo dello spettro di un endomorfismo T , come insieme delle radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice che esprima T . Calcolo degli autospazi di un endomorfismo T , come insiemi delle soluzioni di opportuni sistemi lineari omogenei.

=====