GEOMETRIA E ALGEBRA

C.d.L. Informatica - a.a. 2006-2007 --- prof. Fabio GAVARINI

Testo consigliato: Marco Abate, "Algebra lineare", McGraw-Hill Libri Italia, Milano, 2000
**e inoltre*, soltanto per la parte su spazio duale e applicazioni trasposte:*
Seymour LIPSCHUTZ, "Algebra Lineare - 2a edizione", Schaum ed., pagg. 397-408

Programma del corso

Richiami di algebra. Definizione di spazio vettoriale su un campo; esempi. Sottospazi vettoriali: definizione, criterio perche' un sottoinsieme sia un sottospazio.

Combinazioni lineari. Il sottospazio generato da un numero finito di vettori dati in uno spazio vettoriale. Sistemi di generatori di uno spazio vettoriale.

Dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Un insieme finito di vettori e` linearmente dipendente se e soltanto se uno di essi puo` essere espresso come combinazione lineare degli altri. Insiemi massimali di vettori linearmente indipendenti.

Base (finita) di uno spazio vettoriale: definizione, esempi.
Criterio: Ogni base e` un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti.
Teorema di esistenza (delle basi): Se uno spazio vettoriale V ha un sistema (finito) di generatori A, allora esiste un sottoinsieme B di A che e` base di V.
Teorema di equicardinalita` delle basi: Tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.

Dimensione di uno spazio vettoriale (caso finito): definizione, univocita` della definizione. Coordinate di un vettore rispetto ad una base data.

Trasformazioni (o "applicazioni") lineari (o "omomorfismi") tra spazi vettoriali: definizione, proprieta` elementari. Trasformazioni lineari invertibili (="isomorfismi").

Immagine $Im(f)$ e nucleo $Ker(f)$ di una trasformazione lineare f. Nucleo e imagine di una trasformazione lineare sono sottospazi vettoriali. Criteri di iniettivita` e suriettivita` in termini del nucleo e dell'immagine.
Rango di una trasformazione lineare. Teorema del rango (o "della dimensione"): Se f da V a W e` lineare, allora $rg(f) + dim(Ker(f)) = dim(V)$.

Matrici a coefficienti in un campo: definizione, esempi. Vettori riga e vettori colonna in una matrice. Prodotto righe per colonne di una matrice per un vettore colonna. Corrispondenza biunivoca tra applicazioni lineari e matrici.

L'insieme delle trasformazioni lineari tra due spazi vettoriali e` uno spazio vettoriale. L'insieme delle matrici di forma fissata e` uno spazio vettoriale. La corrispondenza tra applicazioni lineari e matrici e` un isomorfismo di spazi vettoriali.

La composizione di applicazioni lineari: definizione, linearita`.

Il prodotto righe per colonne tra matrici: sua costruzione/definizione come operazione corrispondente alla composizione di applicazioni lineari. Associativita` e distributivita` del prodotto di composizione, e del prodotto righe per colonne.

Matrici trasposte. Proprieta` elementari dell'operazione di trasposizione.

Invertibilita` di trasformazioni lineari. Condizione sulle dimensioni: se $f$ (lineare) tra $V$ e $W$ e` invertibile, allora V e W hanno la stessa dimensione.

Invertibilita` di matrici quadrate, matrice inversa. Relazione con l'invertibilita` e l'inversa delle applicazioni lineari associate. Il gruppo delle matrici invertibili.

Sistemi di equazioni lineari. Formulazione matriciale. Sistemi equivalenti. Sistemi omogenei. Sistemi e matrici di forma particolare: diagonale, triangolare, quadrata.

Criterio di risolubilita`: Un sistema ammette soluzioni (in breve, e` "compatibile") se e soltanto se la colonna dei termini noti e` combinazione lineare delle colonne della matrice dei coefficienti.

Criterio di unicita`: Un sistema compatibile ha una sola soluzione se e soltanto se le colonne della matrice dei coefficienti sono linearmente indipendenti.

Soluzione di un sistema lineare quadrato tramite l'uso della matrice inversa (se tale inversa esiste); esistenza e unicita` della soluzione.

Risoluzione di un sistema lineare quadrato nel caso triangolare: condizione di esistenza di soluzioni (e loro numero), e algoritmo costruttivo per trovarle.

Operazioni elementari su (le equazioni di) un sistema, o sulla sua matrice completa: equivalenza dei sistemi ottenuti mediante operazioni elementari. L'algoritmo di eliminazione di Gauss per sistemi lineari quadrati, o per matrici quadrate: i *pivot*.

Matrici singolari e matrici non-singolari (definizione tramite i pivot).

Teorema: Un sistema quadrato ha una e una sola soluzione se e soltanto se i suoi pivot (comunque ottenuti) sono tutti non nulli.

Lemma: L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo quadrato in n incognite e` un sottospazio vettoriale di K^n.

Teorema (di struttura): L'insieme delle soluzioni di un sistema e` la somma di una soluzione particolare con (l'insieme delle) soluzioni del sistema omogeneo associato.

Rango-colonne e rango-righe di una matrice: definizione, maggiorazione. Uguaglianza tra rango-colonne di una matrice e rango dell'applicazione lineare associata.

Teorema di Rouche'-Capelli: Un sistema lineare ha soluzioni se e soltanto se i ranghi-colonne della sua matrice dei coefficienti e della sua matrice completa sono uguali. Tale soluzione - se esiste - e` unica se e soltanto se il rango-colonne della matrice dei coefficienti e` uguale al numero di incognite.

Lo spazio duale V^*. Il sottospazio W' ortogonale ad un sottospazio W. Base duale (in V^*) di una base data (in V). Equidimensionalita` di V e V^* (nel caso finito). Descrizione di V^* e della sua azione su V tramite gli isomorfismi $V=K^n$ e $V^*=K^n$.

Dimensione dell'ortogonale di un sottospazio.

L'applicazione trasposta di un'applicazione lineare data: definizione, e sua linearita`. Relazione di ortogonalita` tra l'immagine di un'applicazione lineare e il nucleo dell'applicazione trasposta.

Proposizione: Se A e` una matrice, e $L_A$ e` l'applicazione lineare associata. allora l'applicazione trasposta L_A^* ha matrice associata A^T (la trasposta di A). Inoltre, L_A e L_A^* hanno lo stesso rango.

Corollario: Il rango-righe e il rango-colonne di una matrice coincidono.

Matrici a scala e loro pivot; sistemi lineari a scala.

Lemma: Se S e` una matrice a scala, e $j_1,\ldots, j_r$ sono gli indici di colonna dei suoi pivot, allora le colonne $S^{j1},\ldots, S^{jr}$ di S formano una base di $Im(L_S)$. Inoltre $rg(L_S) = r$, e $Im(L_S) = \{ x \text{ in } K^l \mid x_{l-r+1} = \ldots = x_l = 0 \}$.

Criterio di compatibilita` di un sistema a scala. Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema a scala omogeneo. Riduzione a scala di un sistema.
Risoluzione (all'indietro) dei sistemi a scala; struttura dello spazio delle soluzioni.

Teorema: Se A e` una matrice, $S$ e` una riduzione a scala di A, e $j_1,\ldots, j_r$ sono gli indici di colonna dei pivot di S, allora le colonne $A^{j1},\ldots, A^{jr}$ di A formano una base di $Im(L_A)$. In particolare, il rango di A e` uguale al numero r dei pivot.

Condizioni equivalenti per l'invertibilita` di una matrice quadrata: criteri sull'applicazione associata, criterio sul rango, criterio sulle colonne o sulle righe, criteri sull'esistenza e unicita` di soluzioni per il sistema omogeneo associato o per un qualunque sistema associato, criterio sui pivot (in una qualsiasi riduzione a forma triangolare).
Criteri di invertibilita`: una matrice quadrata e` invertibile se e soltanto se e` invertibile a destra o e` invertibile a sinistra.
Metodo di calcolo dell'inversa di una matrice quadrata di ordine nxn, tramite soluzione di n sistemi simultanei dei quali essa sia matrice dei coefficienti.

Costruzione della funzione determinante: motivazioni, proprieta` fondamentali richieste (linearita` in ciascuna riga, nullita` quando due righe sono uguali).
Proprieta` fondamentali di una funzione che goda delle proprieta` fondamentali del determinante: formula di calcolo tramite riduzione a forma triangolare superiore. La formula nel caso diagonale e nel caso triangolare. Definizione del determinante.

Teorema di Esistenza e Unicita` della funzione determinante. Sviluppi di Laplace (per riga o per colonna) per il determinante.
Una matrice quadrata e la sua trasposta hanno determinante uguale.
Formule esplicite per il determinante di matrici di ordine 1, 2, 3.

Teorema di Binet (soltanto l'enunciato): Il determinante e` moltiplicativo.
Corollario: una matrice quadrata e` invertibile se e soltanto se ha determinante diverso da zero.
Teorema di Cramer: formula esplicita della soluzione di un sistema quadrato con matrice invertibile. Formula esplicita dell'inversa di una matrice invertibile.
Teorema degli Orlati per il calcolo del rango di una matrice.

Autovettori, autovalori, autospazi e spettro di un endomorfismo. Indipendenza lineare di autovettori relativi ad autovalori distinti. La dimensione e` un maggiorante per il numero totale di autovalori. Molteplicita` geometrica di un autovalore.
Criterio di diagonalizzabilita`: un endomorfismo e` diagonalizzabile se e soltanto se ha una base (diagonalizzante) di autovettori.
Criterio di diagonalizzabilita` in termini di autospazi (la loro soma e` tutto lo spazio) e di molteplicita` geometriche (la loro soma uguaglia la dimensione dello spazio).

Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata.

Calcolo dello spettro di un endomorfismo T, come insieme delle radici del polinomio caratteristico di una qualunque matrice che esprima T. Calcolo degli autospazi di un endomorfismo T, come insiemi delle soluzioni di opportuni sistemi lineari omogenei.

==