GEOMETRIA e ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2007/2008
Prof. Fabio GAVARINI
Test del 29/05/2008

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . ∗ . . . .

[**1**] Per ogni $\ell \in \mathbb{Q}$, si consideri la matrice

$$M_\ell := \begin{pmatrix} -2 & \ell-3 & 1 \\ 1-\ell & \ell-2 & 0 \\ -8 & 5\ell-14 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Q}) \quad .$$

(a) Al variare di $\ell \in \mathbb{Q}$, calcolare il rango e il determinante della matrice M_ℓ.
(b) Determinare tutti i valori di $\ell \in \mathbb{Q}$ per i quali la matrice M_ℓ sia invertibile.
(c) In particolare, si verifichi che M_{-1} è invertibile, e si calcoli esplicitamente la matrice inversa M_{-1}^{-1}.

[**2**] Sia $\mathbb{K}$ il campo $\mathbb{R}$ oppure il campo $\mathbb{Z}_{11}$. Si considerino i vettori

$$v_1 := (3,1,2) \;, \qquad v_2 := (1,2,-1) \;, \qquad v_3 := (2,2,-4) \;, \qquad v_4 := (5,3,2)$$

nello spazio vettoriale $V := \mathbb{K}^3$, sia $W := Span_{\mathbb{K}}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ il sottospazio vettoriale da essi generato in V, e sia infine $\overline{v} := (5,1,0) \in V$.
(a) Calcolare $dim_{\mathbb{K}}(W)$.
(b) Determinare una base B di W sul campo $\mathbb{K}$.
(c) Determinare se $\overline{v}$ appartenga o meno al sottospazio W. In caso affermativo, trovare un'espressione di $\overline{v}$ come combinazione lineare dei vettori della base B ottenuta in *(b)*.

[**3**] Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -5 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{C}) \quad .$$

e sia $L_A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$, $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$, l'endomorfismo di $V := \mathbb{C}^3$ associato ad A.
(a) Calcolare lo spettro di L_A.
(b) Calcolare tutti gli autospazi relativi ai vari autovalori — se ne esistono!... — di L_A.
(c) Calcolare il polinomio caratteristico di L_A.

[4] Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{5\times 5}(\mathbb{Q})$$

(a) Calcolare il determinante e il rango di M.

(b) Stabilire se la matrice M sia invertibile oppure no. In caso affermativo, si calcoli esplicitamente M^{-1}; in caso negativo, si spieghi perché M non sia invertibile.

[5] Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{Q})$$

(a) Determinare tutti gli autovalori dell'endomorfismo L_M di $\mathbb{Q}^4$ associato a M.

(b) Per ciascun autovalore di L_M, calcolare il corrispondente autospazio.

(c) Precisare se L_M sia diagonalizzabile oppure no.

[6] Calcolare il rango della matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{5,4}(\mathbb{R})$$

usando esplicitamente il *Teorema degli Orlati*.

[7] Dimostrare che le rette r_1 ed r_2 in $\mathbb{C}^3$ aventi equazioni cartesiane ed equazioni parametriche rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad , \qquad r_2 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 0 \\ z = t - 1 \end{cases} \quad (\forall\, t \in \mathbb{C})$$

sono sghembe.

[8] Nello spazio vettoriale $V := {\mathbb{Z}_7}^4$, si considerino i vettori

$$v_1 := (1, 0, 3, 2)\,, \qquad v_2 := (0, -1, 1, 1)\,, \qquad v_3 := (2, 1, 0, -1)$$

(a) Verificare che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

(b) Determinare un vettore $v_4 \in V$ tale che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sia una base di V su $\mathbb{Z}_7$.