GEOMETRIA e ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2007/2008
Prof. Fabio GAVARINI
Test del 15/04/2008

....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente***, spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

.... ∗ ....

[1] Nello spazio affine $\mathcal{A}^3_{\mathbb{R}}$, si fissi un sistema di riferimento affine $RA\big(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\big)$, e si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\pi' : \begin{cases} x = 3 + 2t - s \\ y = -1 + 2s \\ z = 4 - t + 5s \end{cases} \qquad \big(\forall\, t, s \in \mathbb{R}\big)$$

Determinare equazioni parametriche del piano π parallelo a π' e passante per il punto $Q := (-2, 4, -1)$.

[2] Si consideri in $\mathcal{A}^3_{\mathbb{R}}$ un fissato sistema di riferimento affine $RA\big(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\big)$, e siano π ed r rispettivamente il piano e la retta — in $\mathcal{A}^3_{\mathbb{R}}$ — di equazioni parametriche

$$\pi : \begin{cases} x = 2 - t + 2s \\ y = 3 + 2t - s \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \big(\forall\, t, s \in \mathbb{R}\big) , \qquad r : \begin{cases} x = 5 + q \\ y = 3q \\ z = -2 + 2q \end{cases} \quad \big(\forall\, q \in \mathbb{R}\big)$$

(a) Determinare r è parallelo a π oppure no.
(b) Calcolare esplicitamente il sottoinsieme $r \cap \pi$.

[3] Sia $\mathbb{K}$ un campo qualsiasi, e sia $V := M_{2,3}(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici 2×3 a coefficienti in $\mathbb{K}$, con la sua struttura naturale di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si considerino in V i due sottoinsiemi

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; d = 0 \,,\, f = 0 \right\} , \qquad U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; c = -1 \,,\, d = 3 \right\}$$

Dimostrare che:
(a) W è sottospazio vettoriale di V ; *(b)* U non è sottospazio vettoriale di V .

[4] Sia $\mathbb{K}$ uno qualsiasi dei tre campi $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_7$ oppure $\mathbb{R}$. Utilizzando l'algoritmo di eliminazione di Gauss, determinare se i vettori

$$v_1 := \big(3,-1,2\big)\ , \qquad v_2 := \big(0,1,4\big)\ , \qquad v_3 := \big(-2,1,7\big)$$

formino una base dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^3$.

[5] Sia $V := \mathbb{Q}[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile x a coefficienti nel campo $\mathbb{Q}$ dei razionali, con la sua struttura naturale di spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Dati i polinomi

$$p_1 := 3\,x^2-2\ , \quad p_2 := x+5\ , \quad p_3 := -x^3+x+3\ , \quad p_4 := x^2+2\,x+7$$

determinare se essi (come vettori in V) siano linearmente dipendenti oppure indipendenti.

[6] Determinare se la matrice quadrata

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Q})$$

sia singolare oppure non singolare.

[7] Sia $\mathbb{K}$ un campo qualunque, e sia $\mathbb{K}[x]$ l'insieme dei polinomi in una variabile x a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$, con la sua struttura naturale di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si consideri l'applicazione $\Phi : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}^3$ definita da

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \ \mapsto\ \Phi\big(p(x)\big) := \big(\, a_3 - 2\,a_1\,,\, 5\,a_4 + a_2\,,\, a_7 + 2\,a_1 \,\big)$$

Dimostrare che Φ è un'applicazione lineare tra gli spazi vettoriali — su $\mathbb{K}$ — $\mathbb{K}[x]$ e $\mathbb{K}^3$.

[8] Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\circledast\ :\ \begin{cases} 2\,x_2 - x_3 \;=\; 4 \\ 3\,x_1 - x_2 + x_3 \;=\; 0 \\ x_1 + 4\,x_2 - x_3 \;=\; -1 \end{cases}$$

a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$, che può essere sia $\mathbb{R}$, sia $\mathbb{Z}_5$.

Si risolva $\circledast$, utilizzando — esplicitamente — l'algoritmo di eliminazione (o "triangolarizzazione") di Gauss e l'algoritmo di risoluzione dei sistemi (lineari) triangolari.