

GEOMETRIA ed ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2006/2007

Prof. Fabio GAVARINI

Appello del 26 Giugno 2007

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... *

[1] Si considerino i vettori

$$v_1 := (1, 1, -1, -1), \quad v_2 := (1, -1, 1, -1), \quad v_3 := (-1, 0, 0, 1), \quad v_4 := (0, 1, 1, 0)$$

nello spazio vettoriale \mathbb{Q}^4 , e il sottospazio vettoriale $W := \text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ da essi generato.

(a) Determinare un sottoinsieme B_W di $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ che sia una base di W .

(b) Determinare quali tra i vettori $v' := (1, 1, 1, 1)$ e $v'' := (1, 1, 1, -1)$ appartengano a W .

(c) Per ciascuno dei vettori v' e v'' che appartenga a W , determinare le rispettive coordinate rispetto alla base B_W .

[2] Si consideri la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{5 \times 5}(\mathbb{Q}) .$$

(a) Determinare se la matrice M sia invertibile.

(b) Nel caso in cui M non sia invertibile, si calcoli un vettore $v \in \mathbb{Q}^5$ tale che $v \neq (0, 0, 0, 0, 0)^T$ e $Mv = (0, 0, 0, 0, 0)^T$.

Nel caso in cui invece M sia invertibile, si calcoli la matrice inversa M^{-1} .

[3] Per ogni $k \in \mathbb{Q}$, si consideri la matrice

$$A_k := \begin{pmatrix} 2 & 4-k & -1 \\ -2k-2 & k^2-2k-7 & k+3 \\ 6 & 21-6k & k-7 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{Q}) .$$

(a) Calcolare il rango di A_k (per ogni valore di $k \in \mathbb{Q}$).

(b) Calcolare il determinante di A_k (per ogni valore di $k \in \mathbb{Q}$).

(c) Calcolare i valori di $k \in \mathbb{Q}$ per i quali esista la matrice A_k^{-1} inversa di A_k .

[4] Dato $n \in \mathbb{N}_+$, con $n \geq 3$, si consideri una matrice $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Q})$, il cui spettro sia $\text{Spec}(A) = \{-2, 0, 5\}$.

Determinare il numero — eventualmente infinito — di soluzioni dei sistemi di equazioni lineari

$$AX = 2X, \quad AX = \mathbf{0}, \quad AX = X, \quad AX = 5X, \quad AX = -7X$$

(in forma compatta), dove $X \in \mathbb{Q}^n$ è la stringa incognita e $\mathbf{0} := (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Q}^n$.