GEOMETRIA ed ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2006/2007

Prof. Fabio GAVARINI

Appello del 17 Luglio 2007

testo e svolgimento

· · · · · · · · · $*$ · · · · · · · · ·

[1] Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -3 & -6 \\ 5 & -2 & -5 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q}) \ .$$

(a) Determinare quali tra gli elementi dell'insieme $\{-4\,,1\,,0\,,3\,,-2\,,7\}$ siano autovalori di A.
(b) Stabilire — giustificando la risposta — se la matrice A sia diagonalizzabile oppure no.
(c) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

<u>Soluzione</u>*:* Risolviamo i tre punti nell'ordine *(c), (b), (a).*

(c) Per definizione, il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(\lambda) := det\big(\lambda \cdot I_3 - A\big) = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 3 & 6 \\ -5 & \lambda + 2 & 5 \\ -4 & 3 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \big(\lambda^3 - 2\,\lambda^2 - 5\,\lambda + 6\big)$$

(a) Uno scalare è autovalore di una matrice se e soltanto se esso è radice del polinomio caratteristico di tale matrice. Poiché abbiamo

$$p_A(-4) = -76 \neq 0\,,\ \ p_A(1) = 0\,,\ \ p_A(0) = 6 \neq 0\,,\ \ p_A(3) = 0\,,\ \ p_A(-2) = 0\,,\ \ p_A(7) = 216 \neq 0$$

si conclude che 1, 6 e 3 sono autovalori (di A), mentre -4 e 7 NON sono autovalori.

(b) In virtù di *(a)*, la matrice A ha 3 autovalori distinti, e 3 è anche la sua dimensione — cioè $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ — quindi la matrice è diagonalizzabile.

[2] Dato un campo $\mathbb{K}$, si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{K}) \ .$$

Verificare che A è una matrice invertibile, e calcolare la sua matrice inversa A^{-1}, nei due casi:
(a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$;
(b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ (=classi resto modulo 5).

<u>Soluzione</u>: *(a)* Una matrice quadrata è invertibile se e soltanto se il suo determinante è diverso da zero. Pertanto, per risolvere la questione *(a)* possiamo calcolare tale determinante. Lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga dà

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix} = (+1)\cdot 1\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} + (-1)\cdot(-1)\cdot det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + (+1)\cdot(-2)\cdot det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} =$$
$$= \ (+1)\cdot 1\cdot \big(1\cdot 4 - 1\cdot(-7)\big) \ + \ (-1)\cdot(-1)\cdot\big(3\cdot 4 - 1\cdot 1\big) \ + \ (+1)\cdot(-2)\cdot\big(3\cdot(-7) - 1\cdot 1\big) \ = \ 66$$

Poiché $66 \neq 0$ in $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ e anche $66 = 1 \neq 0$ in $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$, si conclude che in entrambi i casi la matrice A è invertibile.

(b) Poiché A è invertibile, dobbiamo calcolarne l'inversa A^{-1}. Consideriamo allora la matrice — rettangolare, di ordine 3×6 — ottenuta giustapponendo A e I_3 (la matrice identità di ordine 3×3), cioè $\big(A \,\big|\, I_3\big)$. Su tale matrice operiamo per eliminazione di Gauss (in avanti e poi all'indietro) e successiva normalizzazione, fino ad ottenere una nuova matrice (ancora 3×6) del tipo $\big(I_3 \,\big|\, A'\big)$, dove allora la matrice A' sarà proprio l'inversa cercata, cioè $A' = A^{-1}$. Abbiamo dunque

$$\big(A \,\big|\, I_3\big) := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 33/2 & -11/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1/3 & 2/11 & 4/33 \\ 0 & 4 & 0 & -2/3 & 4/11 & -14/33 \\ 0 & 0 & 33/2 & -11/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 3/11 & 1/66 \\ 0 & 4 & 0 & -2/3 & 4/11 & -14/33 \\ 0 & 0 & 33/2 & -11/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 3/11 & 1/66 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/11 & -7/66 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/11 & 4/66 \end{array}\right) = \big(I_3 \,\big|\, A^{-1}\big)$$

cioè abbiamo

$$A^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} 1/6 & 3/11 & 1/66 \\ -1/6 & 1/11 & -7/66 \\ -1/3 & 1/11 & 4/66 \end{pmatrix}$$

<u>Nota</u>: *(1)* il metodo seguito per calcolare A^{-1} consente anche di calcolare $det\big(A\big)$, come prodotto dei termini sulla diagonale nella parte sinistra della terzultima matrice (la seconda della seconda riga) considerata qui sopra. In più, tale metodo termina con la matrice $\Big(I_3 \,\Big|\, A^{-1}\Big)$ se e soltanto se A è effettivamente invertibile. Perciò si possono affrontare e risolvere le questioni *(a)* e *(b)* simultaneamente tramite il metodo appena esposto.

(2) Il punto *(b)* si può anche risolvere calcolando A^{-1} tramite la formula generale

$$A^{-1} \ = \ \Big((-1)^{i+j}\, det\big(A_{ij}\big)\cdot det\big(A\big)^{-1}\Big)_{i,j=1,2,3;}$$

in cui A_{ij} è la matrice 2×2 ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j. In questo caso, tale metodo può essere conveniente, perché la matrice A è abbastanza piccola. Però un tale approccio richiede di calcolare separatamente $det\big(M\big)$, cosa che col metodo precedente non è necessaria. $\square$

[3] Nello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$, si considerino i vettori

$$v_1 := (1,3,-1,1) \ , \quad v_2 := (-1,1,-1,1) \ , \qquad w_1 := (3,1,1,-1) \ , \quad w_2 := (1,1,-1,-1)$$

e i sottospazi vettoriali $V := Span\big(v_1, v_2\big)$, $W := Span\big(w_1, w_2\big)$.

(a) Selezionare un sottoinsieme B di $\big\{v_1, v_2, w_1, w_2\big\}$ che sia una base del sottospazio $V+W$.

(b) Determinare se il vettore $u := (3,3,-1,-1)$ appartenga al sottospazio V, W, oppure $V+W$ *(specificare tutti i casi)*.

(c) Se si verifica uno dei casi in *(b)*, determinare le coordinate di u rispetto alla base B in *(a)*.

<u>*Soluzione*</u>: *(a)* Consideriamo la matrice

$$A := \big(v_1 \,\big|\, v_2 \,\big|\, w_1 \,\big|\, w_2\big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha per colonne, nell'ordine, i vettori v_1, v_2, w_1 e w_2 . Usando l'algoritmo di eliminazione di Gauss (nel seguito, e. G.), la riduciamo a forma triangolare superiore, come segue:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La terza matrice a destra è in forma triangolare superiore: i suoi pivots sono 1, 4 e -1, e stanno rispettivamente sulle colonne 1, 2 e 4. Pertanto, ne segue che i *vettori iniziali* che nella matrice iniziale A stavano nelle (cioè costituivano le) colonne 1, 2 e 4 formano una base del sottospazio vettoriale da essi generato. In altre parole, abbiamo $B := \big\{v_1 \, , \, v_2 \, , \, w_2\big\}$.

(b–c) Consideriamo la matrice $\big(A' \,\big|\, u\big) = \big(v_1 \,\big|\, v_2 \,\big|\, w_2 \,\big|\, u\big)$ che ha per colonne, nell'ordine, i vettori v_1, v_2, w_2 e u , e riduciamola in forma triangolare superiore tramite l'e. G., come segue:

$$\big(A' \,\big|\, u\big) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ultima matrice a destra (triangolare superiore) ha tre pivots, nelle colonne 1, 2 e 3; pertanto la quarta colonna è combinazione lineare delle prime tre, e quindi la stessa relazione vale per le colonne della matrice di partenza. Dunque, il vettore u appartiene al sottospazio vettoriale generato dai vettori v_1, v_2 e w_2 , e quindi — per la parte *(a)* — si ha $u \in Span\big(v_1, v_2, w_2\big) = \big(V+W\big)$.

Per scrivere u come combinazione lineare dei suddetti vettori — che formano la base B di $\big(V+W\big)$ trovata in *(a)* — si deve trovare una terna $(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3$ tale che

$$x\,v_1 + y\,v_2 + z\,w_2 = u$$

il che corrisponde a risolvere il sistema lineare che ha per matrice dei coefficienti la matrice A' considerata in precedenza e per colonna dei termini noti il vettore colonna $(3,3,-1,-1)^T$. Per risolvere tale sistema possiamo procedere per e. G., come sopra, trovando quindi

$$\big(A' \,\big|\, u\big) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e poi proseguendo come di consueto — e. G. all'indietro, seguita da normalizzazione — si trova

$$\big(A' \,\big|\, u\big) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \leadsto$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nella matrice finale, la colonna di destra rappresenta la terna soluzione del nostro problema: $(x,y,z) = (1,-1,1)$. Perciò si ha

$$u \;=\; 1 \cdot v - 1 \,+\, (-1) \cdot v_2 \,+\, 1 \cdot w_2 \tag{1}$$

e quindi $u \notin V := Span\big(v_1, v_2\big)$, perché nella (1) il vettore w_2 ha coefficiente non nullo.

Infine, per verificare se u appartenga a $W := Span\big(w_1, w_2\big)$, potremmo andare a considerare il rango della matrice $A'' := \big(w_1 \,\big|\, w_2 \,\big|\, u\big)$, calcolandolo tramite riduzione a forma triangolare superiore, con l'e. G. Oppure, possiamo sfruttare nuovamente i calcoli già eseguiti, in questo modo.

Consideriamo la matrice $A''' := \big(v_1 \,\big|\, v_2 \,\big|\, w_1 \,\big|\, w_2 \,\big|\, u\big) = \big(A \,\big|\, u\big)$, e operiamo su di essa l'e. G.: poiché le colonne di A''' sono le stesse della matrice A o della matrice $\big(A' \,\big|\, u\big)$, possiamo riutilizzare i calcoli già fatti per l'e. G. su *quelle* matrici, e così troviamo

$$A''' \;:=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora estraiamo da A''' la sottomatrice formata dalle colonne 3, 4 e 5 (cioè dai vettori w_1, w_2 e u), che è proprio A''. Dalla precedente riduzione a forma triangolare di A''' otteniamo per A'' la riduzione

$$A'' \;:=\; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e da qui proseguiamo con l'e. G. (che ora è più facile), trovando

$$A'' := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -8 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2/3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si conclude che A'' ha rango 3, e quindi $u \notin W := Span\big(w_1, w_2\big)$.

[4] Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{5\times 5}\big(\mathbb{Q}\big)$$

(a) Stabilire se la matrice M sia invertibile oppure no.

(b) Nel caso in cui M non sia invertibile, si determini l'insieme di tutti i vettori $v \in \mathbb{Q}^5$ tali che $M\,v = (0,0,0,0,0)^T$. Nel caso in cui invece M sia invertibile, si calcoli la matrice inversa M^{-1}.

<u>*Soluzione*</u>: *(a)* Una matrice quadrata è invertibile se e soltanto se il suo determinante è diverso da zero. Pertanto, per risolvere la questione *(a)* possiamo calcolare tale determinante. Lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga dà

$$det \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo ora calcolare tre determinanti di matrici 4×4. Il secondo è nullo, perché la matrice in esame ha una riga tutta di zeri. Il primo e il terzo li calcoliamo tramite sviluppo di Laplace lungo la quarta e lungo la prima colonna rispettivamente, ottenendo

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (+1) \cdot (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (+1) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Restano da calcolare due determinante 3×3, per i quale possiamo applicare la regola di Sarrus. Ma non c'è bisogno di calcolarli, perché tali determinanti coincidono (si tratta due volte della stessa matrice!) e si presentano con segni opposti; quindi, in conclusione abbiamo

$$\mathit{det}\big(M\big) \;=\; (-1)\cdot(+1)\cdot(-1)\cdot \mathit{det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1)\cdot 0 + (+1)\cdot(-1)\cdot(+1)\cdot \mathit{det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; 0$$

e pertanto la matrice M è invertibile.

In alternativa, M è invertibile se e soltanto se ha rango massimo (in questo caso, 5); possiamo quindi rispondere alla domanda calcolando il rango di M. Operando l'e. G. su M troviamo

$$M \;:=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che dimostra che $\mathit{rg}\big(M\big) = 4$, per cui M non è invertibile.

(b) Stante *(a)*, dobbiamo calcolare l'insieme dei vettori $v \in \mathbb{Q}^5$ tali che $M\,v = (0,0,0,0,0)^T$, cioè l'insieme delle soluzioni $\mathbf{0} := \big(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\big) \in \mathbb{Q}^5$ del sistema lineare che ha M come matrice dei coefficienti e il vettore $\big(0,0,0,0,0\big)^T$ come colonna dei termini noti. Risolviamo tale sistema operando con l'e. G. sulla matrice completa del sistema, cioè $\big(M \,\big|\, \mathbf{0}\big)$. Riprendendo i calcoli già fatti per l'e. G. su M, otteniamo

$$\big(M \,\big|\, \mathbf{0}\big) \;:=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Adesso eliminiamo l'ultima riga, e sottraiamo la quinta colonna all'ultima: queste operazioni (segnata qui sotto con $\circledast$) corrispondono a scartare l'ultima equazione e a *scegliere la variabile* x_5 *come parametro*. Poi procediamo con la ricerca delle soluzioni del sistema così modificato, ottenendo

$$\big(M \,\big|\, \mathbf{0}\big) \;:=\; \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\circledast}{\rightsquigarrow}$$

$$\overset{\circledast}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La colonna di destra dell'ultima matrice ottenuta rappresenta una possibile soluzione, che deve essere moltiplicata per tutti i possibili valori del parametro. In conclusione, l'insieme cercato è

$$\Big\{\, \alpha.\big(1,0,0,0,0\big) \,\Big|\, \alpha \in \mathbb{Q} \,\Big\} \;=\; \Big\{\, \big(\alpha,0,0,0,0\big) \,\Big|\, \alpha \in \mathbb{Q} \,\Big\} \quad . \qquad \square$$