GEOMETRIA ed ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2006/2007
Prof. Fabio GAVARINI
Appello del 17 Luglio 2007

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . .   ∗   . . . .

[**1**] Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -3 & -6 \\ 5 & -2 & -5 \\ 4 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{Q}) \, .$$

(a) Determinare quali tra gli elementi dell'insieme $\{-4, 1, 0, 3, -2, 7\}$ siano autovalori di A.
(b) Stabilire — giustificando la risposta — se la matrice A sia diagonalizzabile oppure no.
(c) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

[**2**] Dato un campo $\mathbb{K}$, si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 4 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{K}) \, .$$

Verificare che A è una matrice invertibile, e calcolare la sua matrice inversa A^{-1}, nei due casi:
(a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$;
(b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ (=classi resto modulo 5).

[**3**] Nello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$, si considerino i vettori

$$v_1 := (1, 3, -1, 1) \, , \quad v_2 := (-1, 1, -1, 1) \, , \qquad w_1 := (3, 1, 1, -1) \, , \quad w_2 := (1, 1, -1, -1)$$

e i sottospazi vettoriali $V := Span(v_1, v_2)$, $W := Span(w_1, w_2)$.
(a) Selezionare un sottoinsieme B di $\{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ che sia una base del sottospazio $V + W$.
(b) Determinare se il vettore $u := (3, 3, -1, -1)$ appartenga al sottospazio V, W, oppure $V + W$ *(specificare tutti i casi)*.
(c) Se si verifica uno dei casi in *(b)*, determinare le coordinate di u rispetto alla base B in *(a)*.

[**4**] Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{5\times 5}(\mathbb{Q})$$

(a) Stabilire se la matrice M sia invertibile oppure no.
(b) Nel caso in cui M non sia invertibile, si determini l'insieme di tutti i vettori $v \in \mathbb{Q}^5$ tali che $M\,v = (0,0,0,0,0)^T$. Nel caso in cui invece M sia invertibile, si calcoli la matrice inversa M^{-1}.