GEOMETRIA ed ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2007/2008
Prof. Fabio GAVARINI
Appello del 16 Settembre 2008

....

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

.... $*$ ....

[1] Sia data la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{3,3}(\mathbb{Q})$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

(b) Calcolare gli autovalori di A e i relativi autospazi.

(c) Determinare — giustificando la risposta — se la matrice A sia o non sia diagonalizzabile.

[2] Nello spazio affine razionale tridimensionale $\mathcal{A}^3_{\mathbb{Q}}$, sia π il piano di equazioni cartesiane

$$\pi \, : \, 3x - y + 2z + 5 = 0$$

e sia π' il piano parallelo a π e passante per il punto $P_0 := (-1, 2, 1)$.

(a) Determinare una coppia di vettori di giacitura per il piano π.

(b) Determinare equazioni cartesiane di π'.

(c) Determinare equazioni parametriche di π'.

[3] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{R}^4$, si considerino i vettori

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio vettoriale $V' := Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ di V da essi generato. Inoltre, indicando con $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ i vettori della base canonica, sia $L : V \longrightarrow V$ l'unica applicazione lineare di V in sé stesso tale che $L(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$.

(a) Calcolare la dimensione del sottospazio V'.

(b) Determinare — se possibile — un sottoinsieme B di $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ che sia base di V'.

(c) Determinare se l'applicazione L sia iniettiva, oppure suriettiva, oppure biiettiva.

(continua a pagina 2)

[4] Si consideri la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in Mat_{3,4}(\mathbb{C}) \ .$$

(a) Calcolare il rango di M in almeno *due* modi diversi.

(b) Determinare un sottoinsieme massimale di colonne di M che siano linearmente indipendenti.

(c) Determinare un sottoinsieme massimale di righe di M che siano linearmente indipendenti.