

**GEOMETRIA ed ALGEBRA**  
**CdL in Informatica — a.a. 2006/2007**

Prof. Fabio GAVARINI

Appello del 13 Settembre 2007

.....

*N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma esauriente, spiegando  
chiaramente quanto si fa, e scrivendo in corsivo con grafia leggibile.*

..... \* .....

[1] Si consideri l'applicazione lineare

$$L_A: \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^4, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

(dove “ $\cdot$ ” è il prodotto righe per colonne).

- (a) Calcolare il nucleo  $Ker(L_A)$  e l'immagine  $Im(L_A)$  dell'applicazione  $L_A$ .
- (b) Dimostrare che  $Ker(L_A) \cap Im(L_A) = \{0\}$ .
- (c) Dimostrare che  $Ker(L_A) + Im(L_A) = \mathbb{Q}^4$ .
- (d) Determinare due vettori  $v, w \in \mathbb{Q}^4$  tali che

$$v \in Ker(L_A), \quad w \in Im(L_A), \quad v + w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[2] Si risolva il sistema lineare

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

nelle indeterminate  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4$ .

[3] Si consideri la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (-2 \quad 1 \quad -4 \quad 3) \quad \left( \in Mat_{4 \times 4}(\mathbb{Q}) \right)$$

dove “ $\cdot$ ” è il prodotto righe per colonne.

- (a) Calcolare  $A^2$  (potenza secondo il prodotto righe per colonne).
- (b) Determinare se la matrice  $A$  sia invertibile oppure no.
- (c) Nel caso in cui  $A$  non sia invertibile, si determini l'insieme di tutti i vettori  $v \in \mathbb{Q}^4$  tali che  $Av = (0, 0, 0, 0)^T$ . Nel caso in cui invece  $A$  sia invertibile, si calcoli la matrice inversa  $A^{-1}$ .

(continua a pagina 2)

[4] Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{Q})$$

- (a) Determinare tutti gli autovalori di  $M$ .
- (b) Per ciascun autovalore di  $M$ , calcolare il corrispondente autospazio.