GEOMETRIA ed ALGEBRA
CdL in Informatica — a.a. 2007/2008
Prof. Fabio GAVARINI
Appello dell'1 Luglio 2008

. . . .

N.B.: compilare il compito in modo sintetico ma **esauriente**, *spiegando chiaramente quanto si fa, e scrivendo in* corsivo *con grafia leggibile.*

. . . . $*$ . . . .

[**1**] Si considerino

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in Mat_{4,4}(\mathbb{Q}) \quad , \qquad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4$$

(a) determinare se esista la matrice inversa A^{-1}. In caso negativo, si calcoli un elemento non banale di $Ker(A)$; in caso affermativo, si calcoli esplicitamente la matrice inversa A^{-1}.

(b) Nello spazio affine $\mathcal{A}^4_{\mathbb{Q}}$, si determinino equazioni parametriche del sottospazio $\mathcal{S}'$ che abbia equazioni cartesiane $\circledcirc_{\mathcal{S}'} : A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

[**2**] Sia data la matrice

$$M := \begin{pmatrix} -6 & 4 & 7 \\ -4 & 3 & 6 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in Mat_{3,3}(\mathbb{R}) .$$

(a) Determinare — giustificando la risposta — se la matrice M sia o non sia diagonalizzabile.
(b) Calcolare gli elementi di $\{-6, -2, 0, 1, 3, 5\}$ che siano autovalori di M.
(c) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

[**3**] Al variare del parametro $t \in \mathbb{C}$, si consideri la matrice

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1-t & 0 & -1 \\ 4-t & 1+t & 2-2t \\ t+1 & 2t-1 & 4t-5 \end{pmatrix} \in Mat_{3,3}(\mathbb{C}) .$$

(a) calcolare il rango di $A(t)$;

(b) determinare tutti i valori di $t \in \mathbb{C}$ per i quali la matrice $A(t)$ sia invertibile;

(c) determinare se siano invertibili le matrici $A(1/2)$ e $A(1)$: in caso negativo, si spieghi perché tale inversa non esista; in caso affermativo, calcolare esplicitamente la matrice inversa.

(continua a pagina 2)

[4] Nello spazio vettoriale $V := \mathbb{Q}^3$, si considerino i vettori

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \ , \quad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \ , \quad \mathbf{w}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \ , \quad \mathbf{w}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

e il sottospazio vettoriale $V' := \mathit{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ generato in V dai vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

(a) Calcolare la dimensione del sottospazio V' .

(b) Determinare — se possibile — un sottoinsieme B di $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ che sia base di V' .

(c) Determinare se $\mathbf{w}_1$ oppure $\mathbf{w}_2$ appartenga a V' oppure no.

(d) Qualora sia possibile — spiegare!... — determinare l'espressione (unica!) di $\mathbf{w}_1$ o di $\mathbf{w}_2$ come combinazione lineare dei vettori della base B di V' trovata in *(b)*.
