ALGEBRA COMMUTATIVA — 2009/2010

prof. Fabio Gavarini

········· ∗ ·········

Somme e Prodotti di Moduli

N.B.: (1) nel seguito A indica un anello commutativo unitario.
(2) il simbolo contrassegna gli esercizi — forse — un po' più complessi.

[1] Siano $e_1, \dots, e_n \in A$ tali che

$$e_i\, e_j \;=\delta_{i,j}\, e_i \qquad \forall\, i,j \;\;, \qquad\qquad e_1 + \cdots + e_n \;=\; 1_A$$

e sia $A_i := A\, e_i = \big(e_i\big)$ l'ideale principale di A generato da e_i, per ogni $i = 1, \dots, n$. Dimostrare che:

(a) ogni A_i $(i = 1, \dots, n)$ è un anello (commutativo unitario);

(b) esiste un isomorfismo di anelli (commutativi unitari) $A \cong \prod_{i=1}^{n} A_i$.

[2] Dimostrare che gli A–moduli ciclici sono tutti e soli della forma $M = A\big/\mathfrak{a}$, con $\mathfrak{a} = Ann_A(M) \trianglelefteq A$. In altre parole, dimostrare che:

(a) se M è un A–modulo ciclico, allora $M \cong A\big/\mathfrak{a}$, con $\mathfrak{a} = Ann_A(M) \trianglelefteq A$;

(b) se $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ è ideale di A, allora $M := A\big/\mathfrak{a}$ è un A–modulo ciclico, e $Ann_A(M) = \mathfrak{a}$.

[3] Sia M un A–modulo finitamente generato, e siano $m_1, \dots, m_n \in M$ suoi generatori. Dimostrare che $Ann_A(M) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, con $\mathfrak{a}_i := Ann_A(A.m_i)$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

[4] Siano $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \trianglelefteq A$ ideali di A, e sia $M := \bigoplus_{i=1}^{n} A\big/\mathfrak{a}_i$ l'A–modulo somma diretta dei vari A–moduli quoziente $A\big/\mathfrak{a}_1$, … , $A\big/\mathfrak{a}_n$.

(a) $Ann_A(M) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$;

(b) M è ciclico $\iff$ $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = A$ per ogni $i \neq j$.

(c) Nel caso in cui valgano le condizioni in *(b)* si ha anche $M \cong A\Big/\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$.

[5] Sia M un A–modulo, e sia $\big\{M_i\big\}_{i\in I}$ una famiglia di A–sottomoduli di M tale che

$$\text{(a)}\quad \textstyle\sum_{i\in I} M_i \,=\, M \;\;, \qquad \text{(b)}\quad M_i \cap \big(\sum_{j\in I}^{j\neq i} M_j\big) \,=\, \{0_M\}\;,\;\; \forall\;\, i\in I\;.$$

Dimostrare che esiste un isomorfismo di A–moduli $\bigoplus_{i\in I} M_i \,\cong\, M$.

[6] Sia $\big\{M_i\big\}_{i\in I}$ una famiglia di A–moduli, e sia $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$ il corrispondente A–modulo somma diretta.

Dimostrare che esistono degli A–sottomoduli $M'_i \leq M$ $(i\in I)$ tali che

$$\text{(a)}\;\; \textstyle\sum_{i\in I} M'_i \,=\, M \;,\quad \text{(b)}\;\; M'_i \cap \big(\sum_{j\in I}^{j\neq i} M_j\big) \,=\, \{0_M\}\;\; \forall\, i\in I\,,\quad \text{(c)}\;\; M'_i \,\cong\, M_i \;\; \forall\, i\in I\,.$$

[7] Sia $\big\{M_i\big\}_{i\in I}$ una famiglia di A–moduli. Per ciascun modulo M_i , sia $\big\{m_{i,j}\big\}_{j\in J_i}$ un insieme di generatori di M_i . Dimostrare che:

(a) $\bigcup_{i\in I} \big\{m_{i,j}\big\}_{j\in J_i}$ è un insieme di generatori di $\bigoplus_{i\in I} M_i$;

(b) se la famiglia di indici I è *infinita*, allora $\bigcup_{i\in I} \big\{m_{i,j}\big\}_{j\in J_i}$ *non* è un insieme di generatori di $\prod_{i\in I} M_i$.

[8] – – Siano M_1 e M_2 due A–moduli. Consideriamo le terne (N, p_1, p_2) in cui N è un A–modulo e $p_i \in Hom_A(N, M_i)$ per $i=1,2$. Diremo che una tale terna $\big(\bar{N}, \bar{p}_1, \bar{p}_2\big)$ gode della *Proprietà Universale del Prodotto* (= *PUP*) se per ogni terna (N, p_1, p_2) esiste uno ed un solo morfismo $\varphi \in Hom_A\big(N, \bar{N}\big)$ tale che

$$\bar{p}_i \circ \varphi \,=\, p_i \qquad \forall\;\, i=1,2\;.$$

Dimostrare che:

(a) una terna che goda della PUP, se esiste, è unica a meno di un unico isomorfismo; in altre parole, se $\big(N', p'_1, p'_2\big)$ e $\big(N'', p''_1, p''_2\big)$ sono due terne che godono della PUP, allora esiste uno ed un solo isomorfismo $\varPhi \in Iso_A\big(N', N''\big)$ tale che $p''_i \circ \varPhi \,=\, p'_i$ per $i=1,2$.

(b) la terna $\big(M_1 \times M_2\,,\, p_1^\times, p_2^\times\big)$, in cui $M_1 \times M_2$ è il modulo *prodotto diretto* di M_1 e M_2 e $p_i^\times \in Hom_A\big(M_1 \times M_2, M_i\big)$ per $i=1,2$ è dato da $(m_1, m_2) \mapsto p^\times(m_1, m_2) := m_i$, gode della PUP.

(c) generalizzare quanto sopra al caso di una famiglia arbitraria di A–moduli $\big\{M_i\big\}_{i\in I}$ al posto dei due A–moduli M_1 e M_2 : si formuli la corrispondente PUP, si dimostri che un oggetto che goda della PUP, se esiste, è unico a meno di un unico isomorfismo, e si dimostri che il modulo *prodotto diretto* $\prod\limits_{i\in I} M_i$ gode della PUP.

[9] – – Siano M_1 e M_2 due A–moduli. Consideriamo le terne (Q, j_1, j_2) in cui Q è un A–modulo e $j_i \in Hom_A(M_i, Q)$ per $i = 1,2$. Diremo che una tale terna $\big(\widehat{Q}, \hat{\jmath}_1, \hat{\jmath}_2\big)$ gode della *Proprietà Universale della Somma (o coProdotto)* (= *PUS*) se per ogni terna (Q, j_1, j_2) esiste uno ed un solo morfismo $\psi \in Hom_A\big(\widehat{Q}, Q\big)$ tale che

$$\psi \circ \hat{\jmath}_i \; = \; j_i \qquad \forall \;\, i = 1, 2 \; .$$

Dimostrare che:

(a) una terna che goda della PUS, se esiste, è unica a meno di un unico isomorfismo; in altre parole, se $\big(Q', j'_1, j'_2\big)$ e $\big(Q'', j''_1, j''_2\big)$ sono due terne che godono della PUP, allora esiste uno ed un solo isomorfismo $\varPsi \in Iso_A\big(Q'', Q'\big)$ tale che $\varPsi \circ j''_i \; = \; j'_i$ per $i = 1,2$.

(b) la terna $\big(M_1 \oplus M_2 \, , \, j_1^{\oplus}, j_2^{\oplus}\big)$, in cui $M_1 \oplus M_2$ è il modulo *somma diretta* di M_1 e M_2 e $j_i^{\oplus} \in Hom_A\big(M_i, M_1 \oplus M_2\big)$ per $i = 1,2$ è dato da $m_1 \mapsto j^{\oplus}(m_1) := (m_1, 0)$, $m_2 \mapsto j^{\oplus}(m_2) := (0, m_2)$, per ogni $m_i \in M_i \; (i = 1,2)$, gode della PUS.

(c) generalizzare quanto sopra al caso di una famiglia arbitraria di A–moduli $\big\{M_i\big\}_{i \in I}$ al posto dei due A–moduli M_1 e M_2 : si formuli la corrispondente PUS, si dimostri che un oggetto che goda della PUS, se esiste, è unico a meno di un unico isomorfismo, e si dimostri che il modulo *somma diretta* $\bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ gode della PUS.

[10] Siano M e N due A–moduli, e siano $j : N \longrightarrow M$ e $p : M \longrightarrow N$ due morfismi (di A–moduli) tali che $p \circ j = id_N$. Dimostrare che:

(a) p è suriettivo;

(b) j è iniettivo;

(c) $M \; = \; Im(j) \oplus Ker(p)$.

[11] Siano M_1 e M_2 due A–moduli, e $M_1 \oplus M_2$ l'A–modulo *somma diretta* di M_1 e M_2 .

(a) Dimostrare che esistono $p_k \in Hom_A\big(M_1 \oplus M_2 \, , M_k\big)$, $j_k \in Hom_A\big(M_k \, , M_1 \oplus M_2\big)$ — per $k = 1,2$ — tali che

$$p_k \circ j_k \; = \; id_{M_k} \;\; (k = 1,2) \; , \qquad p_h \circ j_k \; = \; 0 \;\; (h \neq k) \; , \qquad p_1 \circ j_1 + p_2 \circ j_2 \; = \; id_{M_1 \oplus M_2}$$

(b) Generalizzare il punto *(a)* al caso della somma diretta $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ di un numero (finito) arbitrario di A–moduli $M_1 \, , \, M_2 \, , \, \dots , \, M_n$.

[12] – – Siano $\bigoplus_{j=1}^{n} M_j$ e $\bigoplus_{i=1}^{\ell} N_i$ due somme dirette (finite) di moduli.

Dimostrare che ogni morfismo $\phi \in Hom_A\big(\bigoplus_{j=1}^{n} M_j \, , \bigoplus_{i=1}^{\ell} N_i\big)$ è descritto in modo univoco da una matrice $\ell \times n$ i cui coefficienti sono morfismi $\phi_{i,j} \in Hom_A\big(M_j \, , N_i\big)$, cioè

$$\phi \; = \; \big(\phi_{i,j}\big)_{i=1,\dots,\ell}^{j=1,\dots,n} \; = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \phi_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \phi_{i,j} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{\ell,1} & \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} & \phi_{\ell,n} \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad \phi_{i,j} \in Hom_A\big(M_j \, , N_i\big) \;\; \forall \, i, j$$

<u>Suggerimento</u>: (1) per cominciare, si consideri ad esempio il caso $n = 1$ oppure $\ell = 1$; poi si consideri il caso $n = 2 = \ell$, e così via.

(2) si ricordi che, come insiemi, si ha $\bigoplus_{j=1}^{n} M_j = \times_{j=1}^{n} M_j$ e $\bigoplus_{i=1}^{\ell} N_i = \times_{i=1}^{\ell} N_i$, quindi gli elementi di $\bigoplus_{j=1}^{n} M_j$ sono n–uple $(m_1, \dots, m_n)$ con $m_j \in M_j$ per ogni j, e similmente gli elementi di $\bigoplus_{i=1}^{\ell} N_i$ sono ℓ–uple $(n_1, \dots, n_\ell)$ con $n_i \in N_i$ per ogni i.

(3) si faccia uso del risultato dell'Esercizio 11 qui sopra.

[13] Siano $\bigoplus_{j=1}^{n} M_j$, $\bigoplus_{i=1}^{\ell} N_i$ e $\bigoplus_{k=1}^{t} P_k$ tre somme dirette (finite) di moduli.

(a) Dimostrare che dati due omomorfismi di A–moduli $\phi \in Hom_A\big(\bigoplus_{j=1}^{n} M_j \, , \bigoplus_{i=1}^{\ell} N_i\big)$ e $\psi \in Hom_A\big(\bigoplus_{i=1}^{\ell} N_i \, , \bigoplus_{k=1}^{t} P_k\big)$, il loro prodotto $\psi \circ \phi \in Hom_A\big(\bigoplus_{j=1}^{n} M_j \, , \bigoplus_{k=1}^{t} P_k\big)$ è dato dal prodotto righe per colonne delle due matrici che corrispondono a ϕ e a ψ come esposto nell'Esercizio 11 qui sopra, cioè

$$\phi \; = \; \big(\phi_{i,j}\big)_{i=1,\dots,\ell}^{j=1,\dots,n} \quad , \quad \psi \; = \; \big(\psi_{r,s}\big)_{r=1,\dots,t}^{s=1,\dots,\ell} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \psi \circ \phi \; = \; \big(\psi_{r,s}\big)_{r=1,\dots,t}^{s=1,\dots,\ell} \cdot \big(\phi_{i,j}\big)_{i=1,\dots,\ell}^{j=1,\dots,n} \; = \; \Big(\textstyle\sum_{j=1}^{\ell} \psi_{r,h} \circ \phi_{h,j}\Big)_{r=1,\dots,t}^{j=1,\dots,n}$$

dove si ha $\phi_{i,j} \in Hom_A\big(M_j \, , N_i\big)$, $\psi_{r,s} \in Hom_A\big(N_s \, , P_r\big)$, e quindi

$$\psi_{r,h} \circ \phi_{h,j} \; \in \; Hom_A\big(N_h \, , P_r\big) \circ Hom_A\big(M_j \, , N_h\big) \; \subseteq \; Hom_A\big(M_j \, , P_r\big) \; .$$

(b) Dimostrare che l'insieme di matrici (quadrate) $n \times n$

$$Mat_{n \times n}\Big(\big(Hom_A(M_j \, , M_i)\big)_{i=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}\Big) \; := \; \Big\{ \big(\phi_{i,j}\big)_{i=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n} \; \Big| \; \phi_{i,j} \in Hom_A\big(M_j \, , M_i\big) \, , \; \forall \, i, j \Big\}$$

è un anello unitario, isomorfo all'anello $End_A\big(\bigoplus_{j=1}^{n} M_j\big) := Hom_A\big(\bigoplus_{j=1}^{n} M_j \, , \bigoplus_{j=1}^{n} M_j\big)$ degli endomomorfismi (di A–modulo) di $\bigoplus_{j=1}^{n} M_j$

[14] *(a)* Dimostrare che esiste un isomorfismo di anelli unitari $End_A(A) \cong A$ tra l'anello $End_A(A) := Hom_A(A, A)$ degli endomorfismi di A (come A–modulo) e l'anello A stesso.

(b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $A^{\oplus n} := \bigoplus_{j=1}^{n} A$ l'A–modulo somma diretta di n copie di A. Dimostrare che l'anello unitario $End_A\big(A^{\otimes n}\big) := Hom_A\big(A^{\otimes n}, A^{\otimes n}\big)$ degli endomomorfismi di $A^{\otimes n}$ (come A–modulo) è isomorfo all'anello unitario $Mat_{n\times n}(A)$ di tutte le matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti in A.

[15] – – Sia R un qualsiasi anello unitario (non necessariamente commutativo), e sia R^{op} l'*anello opposto* di R, cioè l'anello $\big(R\,;+,\bullet\big)$ dove $+$ è la somma in R e $\bullet$ è invece la moltiplicazione *opposta* a quella in R, tale cioè che $x \bullet x' := x' \cdot x$ per ogni $x, x' \in R$, dove $x \cdot x'$ è il prodotto assegnato (originariamente) in R.

(a) Dimostrare che esiste un isomorfismo di anelli unitari $End_R(R) \cong R^{op}$ tra l'anello $End_R(R) := Hom_R(R, R)$ degli endomorfismi di R (come R–modulo) e l'anello R^{op}.

(b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $R^{\oplus n} := \bigoplus_{j=1}^{n} R$ l'R–modulo somma diretta di n copie di R. Dimostrare che l'anello unitario $End_R\big(R^{\otimes n}\big) := Hom_R\big(R^{\otimes n}, R^{\otimes n}\big)$ degli endomomorfismi di $R^{\otimes n}$ (come R–modulo) è isomorfo all'anello unitario $Mat_{n\times n}\big(R^{op}\big)$ di tutte le matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti in R^{op}.

Suggerimento: si formulino e si utilizzino gli analoghi, per gli R–moduli, dei risultati negli Esercizi 12 e 13 qui sopra.

[16] – – Si generalizzino i risultati degli Esercizi 8–9 e 11–12 qui sopra al caso di somme dirette $\bigoplus_{j\in J} M_j$ e $\bigoplus_{i\in I} N_i$ di famiglie arbitrarie (anche infinite) di A–moduli.

In tal caso si devono considerare "matrici infinite" le cui righe siano indicizzate da J e le cui colonne siano indicizzate da I, e i cui coefficienti siano opportuni morfismi — tra gli N_i e gli M_j — con l'ulteriore condizione che essi siano *quasi tutti nulli.* In altre parole, ogni riga — pur essendo ciascuna illimitata — deve contenere *un numero finito* di coefficienti non nulli, e così anche ogni colonna.