Esercizi di

ALGEBRA COMMUTATIVA

prof. Fabio Gavarini

$\cdots\cdots\cdots \quad * \quad \cdots\cdots\cdots$

Prodotti tensoriali, Dualità, Algebre

N.B.: (1) nel seguito A indica un anello commutativo unitario.
(2) il simbolo contrassegna gli esercizi — forse — un po' più complessi.

[1] Siano M, N e P degli A–moduli. Dimostrare che l'insieme di applicazioni

$$Bil_A\big(M \times N\,, P\big) \;:=\; \big\{\, f \in P^{M \times N} \,\big|\, f \text{ è } A\text{–bilineare} \,\big\}$$

è un A–sottomodulo dell'A–modulo $P^{M \times N}$ (con le operazioni puntuali, sui valori).
Generalizzare poi tale risultato al caso di n moduli $M_1\,, \dots, M_n$ al posto di M e N.

[2] Siano M, N e P degli A–moduli. Dimostrare che

$$Bil_A\big(M \times N\,, P\big) \;\cong\; Hom_A\big(M \otimes_A N\,, P\big) \qquad \text{come } A\text{–moduli.}$$

Generalizzare poi tale risultato al caso di n moduli $M_1\,, \dots, M_n$ al posto di M e N.

[3] Siano M e N degli A–moduli. Dimostrare che

$$Ann_A\big(M \otimes_A N\big) \;\supseteq\; Ann_A(M) + Ann_A(N)$$

Generalizzare poi tale risultato al caso di n moduli $M_1\,, \dots, M_n$ al posto di M e N.

[4] Siano $\mathfrak{a}\,, \mathfrak{b} \trianglelefteq A$ degli ideali di A. Dimostrare che

$$A\big/\mathfrak{a} \otimes_A A\big/\mathfrak{b} \;\cong\; A\big/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \qquad \text{come } A\text{–moduli.}$$

Generalizzare poi tale risultato al caso di n ideali $\mathfrak{a}_1\,, \dots, \mathfrak{a}_n$ al posto di $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$. Infine, confrontare il risultato così ottenuto con quello dato dal *Teorema Cinese del Resto*.

[5] – – Sia D un dominio di integrità, e sia $Q(D)$ il suo campo dei quozienti.
Dimostrare che $\;Q(D) \otimes_D Q(D) \;\cong\; Q(D)\;$ come D–moduli.

[6] Dato un A–modulo M, definiamo l'insieme

$$M[x] \;:=\; \Big\{ \sum_{k=0}^{n} m_k\, x^k \;\Big|\; n \in \mathbb{N}\,,\, m_k \in M \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \Big\} \;=\; \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M x^n$$

(a) Dimostrare che $M[x]$ è un $A[x]$–modulo rispetto alle operazioni

$$\Big(\sum_{k=0}^{n'} m'_k\, x^k\Big) + \Big(\sum_{h=0}^{n''} m''_h\, x^h\Big) \;:=\; \sum_{\ell=0}^{n' \vee n''} \big(m'_\ell + m''_\ell\big)\, x^k$$

$$\Big(\sum_{k=0}^{n'} a_k\, x^k\Big) . \Big(\sum_{h=0}^{n''} m_h\, x^h\Big) \;:=\; \sum_{\ell=0}^{n' \vee n''} \big(a_\ell . m_\ell\big)\, x^k$$

per ogni $\sum_{k=0}^{n'} m'_k\, x^k\,,\, \sum_{h=0}^{n''} m''_h\, x^h \in M[x]$ e per ogni $\sum_{k=0}^{n'} a_k\, x^k \in A[x]$.

(b) Generalizzare il risultato in *(a)* per gli analoghi moduli $M[[x]]$, $M\big[x, x^{-1}\big]$ e $M((x))$ — da definire... — sugli anelli $A[[x]]$, $A\big[x, x^{-1}\big]$ e $A((x))$ rispettivamente.

(c) Generalizzare i risultati in *(a)* e *(b)* al caso di n indeterminate $x_1, \dots, x_n$ al posto della sola x.

[7] *(a)* Con la notazione dell'esercizio 6 qui sopra, dimostrare che si hanno morfismi naturali

$$A[x] \otimes_A M \longrightarrow M[x] \quad , \qquad\qquad A[[x]] \otimes_A M \longrightarrow M[[x]]$$

$$A\big[x, x^{-1}\big] \otimes_A M \longrightarrow M\big[x, x^{-1}\big] \quad , \qquad\qquad A((x)) \otimes_A M \longrightarrow M((x))$$

come A–moduli. Generalizzare poi al caso di n indeterminate $x_1, \dots, x_n$ al posto di x.

(b) Si consideri su $A[x] \otimes_A M$ la struttura naturale (ovvia) di $A[x]$–modulo — definita per *estensione di scalari* da A a $A[x]$ — e analogamente si consideri $A[[x]] \otimes_A M$, risp. $A\big[x, x^{-1}\big] \otimes_A M$, risp. $A((x)) \otimes_A M$, come modulo sull'anello $A[[x]]$, risp. su $A\big[x, x^{-1}\big]$, risp. su $A((x))$. Verificare che i morfismi di A–moduli considerati in *(a)* sono anche morfismi *di* $A[[x]]$*–moduli*, risp. *di* $A\big[x, x^{-1}\big]$*–moduli*, risp. *di* $A((x))$*–moduli*.

Generalizzare poi al caso di n indeterminate $x_1, \dots, x_n$ al posto di x.

(c) Dimostrare che i morfismi $A[x] \otimes_A M \longrightarrow M[x]$ (come moduli su $A[x]$) e $A\big[x, x^{-1}\big] \otimes_A M \longrightarrow M\big[x, x^{-1}\big]$ (come moduli su $A\big[x, x^{-1}\big]$) di cui al punto *(b)* sono in effetti *isomorfismi*. Generalizzare poi al caso di n indeterminate $x_1, \dots, x_n$ al posto di x.

[8] Siano $A[x]$, $A\big[x, x^{-1}\big]$, $A[[x]]$ e $A((x))$ rispettivamente l'anello dei polinomi, dei polinomi di Laurent, delle serie formali e delle serie di Laurent in x a coefficienti in A. Abbiamo allora le inclusioni (come sottoanelli unitari)

$$A \leq A[x] \leq A[[x]] \leq A((x)) \quad , \qquad\qquad A \leq A[x] \leq A\big[x, x^{-1}\big] \leq A((x))$$

rispetto alle quali ciascun anello può essere considerato un modulo su ogni suo sottoanello.

Dimostrare che:

(a) $\quad A\big[x, x^{-1}\big] \otimes_{A[x]} A[[x]] \;\cong\; A((x))$ come $A[x]$–moduli;

(b) $\quad A\big[x, x^{-1}\big] \otimes_A A[[x]] \;\cong\; \Big(A\big[y, y^{-1}\big]\Big)[[z]]$ come A–moduli.

Generalizzare poi tali risultati (nei vari modi possibili...) al caso di n indeterminate x_1, ..., x_n al posto della sola x.

[9] Dimostrare la *proprietà distributiva generalizzata* del prodotto tensoriale, e precisamente: per ogni A–modulo M ed ogni famiglia di A–moduli $\{N_i\}_{i\in I}$, si ha

$$M \otimes \big(\bigoplus_{i\in I} N\big) \;=\; \bigoplus_{i\in I} (M \otimes N_i)$$

[10] Siano M e N due A–moduli *liberi*. Dimostrare che $M \otimes_A N$ è a sua volta libero, e che inoltre $rk\big(M \otimes_A N\big) = rk(M) \cdot rk(N)$.

<u>Suggerimento</u>: sfruttare la proprietà distributiva generalizzata del prodotto tensoriale, insieme al fatto che $A \otimes_A A \cong A$ come A–moduli.

[11] Sia A un anello *locale*, e siano M e N due A–moduli finitamente generati.
Dimostrare che $M \otimes_A N = 0$ implica $M = 0$ oppure $N = 0$.

<u>Suggerimento</u>: sfruttare il Lemma di Nakayama e l'esercizio 10 qui sopra.

[12] Sia $\{M_i\}_{i\in I}$ una famiglia di A–moduli. Dimostrare che $\big(\oplus_{i\in I} M_i\big)^* \cong \prod_{i\in I} M_i^*$.

[13] Dimostrare che $A^* \cong A$ come A–moduli.

[14] Sia M un A–modulo libero di rango finito. Dimostrare che

$$M^* \text{ è libero,} \qquad \text{e} \qquad rg_A\big(M^*\big) = rg_A(M) \;\; .$$

[15] Sia M un A–modulo, e sia $\eta_M : M \longrightarrow M^{**}$ l'applicazione data da

$$m \;\mapsto\; \eta_M(m) := ev_m\Big(f \mapsto f(m)\,,\ \forall\, f \in M^*\Big)$$

dove $M^{**} := \big(M^*\big)^*$ è il *biduale* di M . Dimostrare che:

(a) η_M è un morfismo di A–moduli;

(b) se M è libero, allora η_M è iniettivo;

(c) se M è libero di rango finito, allora η_M è un isomorfismo;

[16] – – Siano V e W due A–moduli liberi. Dimostrare che:

(a) $\exists!$ morfismo $j : V^* \otimes W \longrightarrow Hom_A(V,W)$ dato da $j\,(f \otimes w)\Big(v \mapsto f(v).w\Big)$;

(b) il morfismo j in *(a)* è iniettivo;

(c) se V e W hanno rango finito, allora j è un isomorfismo.

[17] – – Sia $A = \mathbb{K}$ un campo, e siano V e w due $\mathbb{K}$–moduli (cioè spazi vettoriali su $\mathbb{K}$), e sia $j : V^* \otimes W \longrightarrow Hom_A(V, W)$ il corrispondente morfismo considerato nell'esercizio 13 qui sopra. Dimostrare che:

(a) $\forall\, f \in V^* \setminus \{0\}$, $\forall\, w \in W \setminus \{0\}$, l'applicazione lineare $j\,(f \otimes w) \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ ha rango — nel senso delle applicazioni lineari — pari a 1;

(b) $\forall\, z \in V^* \otimes W$, sia $z = \sum_{i=1}^{k} f_i \otimes w_i$ una espressione di z come somma di tensori *omogenei* che abbia lunghezza (per definizione pari a k) *minima* possibile. Dimostrare che tale lunghezza k è pari al rango dell'applicazione lineare $j(z)$.

[18] Siano M, M', N e N' degli A–moduli. Dimostrare che esiste uno e un solo morfismo di A–moduli

$$\phi \;:\; Hom_A\big(M, M'\big) \otimes_A Hom_A\big(N, N'\big) \;\longrightarrow\; Hom_A\big(M \otimes_A N \,,\, M' \otimes_A N'\big)$$

dato da $\phi(u \otimes v) = u \otimes v$ per ogni $u \in Hom_A\big(M, M'\big)$, $v \in Hom_A\big(N, N'\big)$.

[19] Sia B una A–algebra, e siano M e N dei B–moduli. Si considerino poi sui B–moduli M, N e $M \otimes_B N$ le rispettive strutture di A–modulo ottenute per restrizione di scalari (da B ad A); in particolare, resta allora definito anche l'A–modulo $M \otimes_A N$. Dimostrare che esiste uno e un solo epimorfismo (canonico) di A–moduli $M \otimes_A N \twoheadrightarrow M \otimes_B N$.

[20] Sia $f : A \longrightarrow B$ un morfismo di anelli, e sia N un B–modulo. Considerando N come A–modulo tramite restrizione di scalari, si formi poi il B–modulo $N_B := B \otimes_A N$ ottenuto per estensione. Dimostrare che l'applicazione $g : N \longrightarrow N_B$, $n \mapsto g(n) := 1 \otimes n$, è un morfismo di B–moduli, che g è iniettivo, e che $g(N)$ è un addendo diretto di N_B , cioè esiste un B–sottomodulo N' di N_B tale che $N_B = g(N) \oplus N'$.

[21] Dato $n \in \mathbb{N}$, sia A^n l'A–modulo libero di rango n . Dimostrare che:

(a) l'insieme $End_A\big(A^n\big)$ degli endomorfismi di A^n, con la sua struttura naturale di A–modulo, è una A–algebra rispetto al prodotto di composizione;

(b) l'insieme $Mat_n(A)$ delle matrici $(n \times n)$ a coefficienti in A , con la sua struttura naturale di A–modulo, è una A–algebra rispetto al prodotto righe per colonne;

(c) l'insieme $\mathfrak{sl}_n(A) := \big\{\, P \in Mat_n(A) \,\big|\, Tr(P) = 0 \,\big\}$ delle matrici $(n \times n)$ a coefficienti in A con traccia nulla, con la sua struttura naturale di A–modulo, è una A–algebra rispetto al prodotto così definito:

$$X \star Y \;:=\; X \cdot Y - Y \cdot X \quad , \qquad \forall\;\, X, Y \in Mat_n(A)$$

dove $X \cdot Y$ e $Y \cdot X$ sono prodotti righe per colonne.

[22] Dato $n \in \mathbb{N}$, sia A^n l'A–modulo libero di rango n, e siano $\underline{e}_k := \big(\delta_{h,k}\big)_{h=1,\dots,n;}$, per $k = 1, \dots, n$, i vettori della base canonica di A^n. Sia poi $\Phi : End_A\big(A^n\big) \longrightarrow Mat_n(A)$ l'applicazione naturale definita da $\psi \mapsto \Phi(\psi) := \big(a_{i,j}\big)_{i,j=1,\dots,n;}$ se $\psi(\underline{e}_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}\, \underline{e}_i$.

Dimostrare che tale Φ è un isomorfismo di A–algebre.