Esercizi di

ALGEBRA COMMUTATIVA

prof. Fabio Gavarini

· · · · · · · · ·   ∗   · · · · · · · · ·

Moduli e Anelli Noetheriani e Artiniani

N.B.: (1) nel seguito A indica un anello commutativo unitario.
(2) il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi — forse — un po' più complessi.

[1] Sia M un A–modulo, e $\phi : M \longrightarrow M$ un endomorfismo di M. Dimostrare che

(a) se M è noetheriano e ϕ è suriettivo, allora ϕ è un isomorfismo;

(b) se M è artiniano e ϕ è iniettivo, allora ϕ è un isomorfismo.

Suggerimento: per la (a) si consideri la c.c.a. rispetto ai vari sottomoduli $Ker\big(\phi^n\big)$, e per la (b) invece la c.c.d. rispetto ai sottomoduli $Im\big(\phi^n\big)$, al variare di $n \in \mathbb{N}$.

[2] *Lemma di Fitting:* Sia M un A–modulo noetheriano e artiniano (cioè di lunghezza finita), e $\phi : M \longrightarrow M$ un endomorfismo di M. Dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}_+$ tale che

(a) $M = Ker\big(\phi^n\big) \oplus Im\big(\phi^n\big)$;

(b) la restrizione di ϕ a $Im\big(\phi^n\big)$ è un automorfismo di $Im\big(\phi^n\big)$;

(c) la restrizione di ϕ a $Ker\big(\phi^n\big)$ è un endomorfismo nilpotente di $Ker\big(\phi^n\big)$.

Suggerimento: rifarsi all'Esercizio 1 qui sopra.

[3] Sia M un A–modulo. Si dice che M è *decomponibile* se esistono A–sottomoduli M', M'' di M tali che $M' \neq 0$, $M'' \neq 0$, $M = M' \oplus M''$; altrimenti M si dice *indecomponibile.*

Sia M un A–modulo noetheriano e artiniano indecomponibile, e sia $\phi \in End_A(M)$ un endomorfismo di M. Dimostrare che o ϕ è nilpotente, oppure ϕ è invertibile.

Suggerimento: sfruttare l'Esercizio 2 qui sopra.

[4] Sia M un A–modulo. Dimostrare che:

(a) se M è artiniano, allora ammette una decomposizione $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$ in cui ciascuno dei sottomoduli M_i è *indecomponibile* (cf. l'Esercizio 3 qui sopra);

(b) – ☡☡☡ – se M è artiniano e noetheriano, allora la decomposizione in somma diretta di indecomponibili $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$ in *(a)* è unica, nel senso che gli addendi $M_1, \dots, M_k$ sono univocamente determinati a meno di isomorfismi e dell'ordine.

[5] Sia M un A–modulo. Dimostrare che se ogni insieme non vuoto di sottomoduli di M *finitamente generati* possiede un elemento massimale, allora M è noetheriano.

[6] Sia M un A–modulo noetheriano, e sia $\mathfrak{a} := Ann_A(M)$. Dimostrare che $A\big/\mathfrak{a}$ è un anello noetheriano.

Suggerimento: si osservi che M è finitamente generato, e si sfrutti questo fatto per immergere $A\big/\mathfrak{a}$ come A–sottomodulo di un A–modulo noetheriano, quindi si concluda.

[7] – ☡ – Sia dato un anello K che sia finitamente generato, e sia un campo. Dimostrare che allora K è un campo finito.

Suggerimento: si sfrutti il risultato per cui dati tre anelli $A \subseteq B \subseteq C$ tali che A è noetheriano, e C è A–algebra finitamente generata e B–algebra finita, si ha che anche B è A–algebra finitamente generata. Si usi questo fatto per dedurre che $p := Char(K) > 0$, prima, e poi che K è estensione finita del campo con p elementi.

[8] Siano $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideali di A tali che ciascun anello quoziente $A\big/\mathfrak{a}_i$ sia noetheriano (per $i = 1, \dots, n$). Dimostrare che l'anello quoziente $A\Big/\cap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$ è a sua volta noetheriano.

[9] Sia M un A–modulo noetheriano. Dimostrare che l'$A[x]$–modulo $M[x]$ è a sua volta noetheriano. Generalizzare poi al caso di n indeterminate $x_1, \dots, x_n$ al posto di x.

[10] Sia A un dominio a ideali principali. Dato un elemento $a \in A \setminus \big(U(A) \cup \{0\}\big)$, sia $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ una fattorizzazione di a in primi a due a due non associati. Dimostrare che $(a) = \big(p_1^{e_1}\big) \cap \big(p_2^{e_2}\big) \cap \cdots \cap \big(p_k^{e_k}\big)$ è una decomposizione primaria dell'ideale (a).

[11] Sia S una parte moltiplicativa di A, e $\mathfrak{q}$ un ideale $\mathfrak{p}$–primario di A Dimostrare che:

(a) $\quad S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset \implies S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}A$;

(b) $\quad S \cap \mathfrak{p} = \emptyset \implies S^{-1}\mathfrak{q}$ è ideale $S^{-1}\mathfrak{p}$–primario in $S^{-1}A$.

[12] Supponiamo che nell'anello A ogni ideale abbia una decomposizione primaria, cioè sia esprimibile come intersezione di ideali primari. Dimostrare che la stessa proprietà vale nell'anello $S^{-1}A$, dove S è una qualsiasi parte moltiplicativa di A.

[13] Si consideri l'anello $A := \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\,\big]$.

(a) Dimostrare che ogni ideale di A ammette una decomposizione primaria.

(b) Considerati gli ideali $\mathfrak{a} := (6)$, $\mathfrak{p} := \big(2, 1+\sqrt{-5}\,\big)$, $\mathfrak{p}' := \big(3, 1+\sqrt{-5}\,\big)$ e $\overline{\mathfrak{p}'} := \big(3, 1-\sqrt{-5}\,\big)$, verificare che $\mathfrak{a}$ ammette la decomposizione primaria $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^2 \cap \mathfrak{p}' \cap \overline{\mathfrak{p}'}$.

[14] Sia A un PID (=dominio a ideali principali).
Dimostrare che $dim(A) = 1$, dove $dim(A)$ indica la dimensione (di Krull) di A .

[15] Sia A un PID, e sia $\mathfrak{a} \trianglelefteq A$ un ideale *non banale* di A .
Dimostrare che l'anello quoziente $A\big/\mathfrak{a}$ è artiniano.

[16] Sia A un PID, sia $p \in A$ un elemento irriducibile, sia $n \in \mathbb{N}$, e sia $\left(p^n\right)$ l'ideale primo di A generato da p^n .
Dimostrare che l'anello quoziente $A\Big/\left(p^n\right)$ è artiniano locale.

[17] Sia A un PID, sia $a \in A \setminus \big(U(A) \cup \{0\}\big)$, e sia $a = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ una fattorizzazione di a in prodotto di elementi irriducibili p_i a due a due non associati.
Dimostrare che esiste un isomorfismo naturale di anelli $A\big/(a) \cong \prod_{i=1}^{k} A\Big/\left(p_i^{e_i}\right)$.