Esercizi di

ALGEBRA COMMUTATIVA

prof. Fabio Gavarini

$\cdots\cdots\cdots \quad * \quad \cdots\cdots\cdots$

Anelli e Moduli di Frazioni

N.B.: (1) nel seguito A indica un anello commutativo unitario,
e S una parte moltiplicativa (eventualmente specificata) di A.
(2) il simbolo ☡ contrassegna gli esercizi — forse — un po' più complessi.

[1] Sia M un A–modulo finitamente generato. Dimostrare che $S^{-1}M = \{0\}$ se e soltanto se esiste un elemento $s \in S$ tale che $s.M = \{0\}$.

[2] Siano S e T due parti moltiplicative di A, e sia $U := f(T)$ dove $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ è il morfismo naturale. Dimostrare che:

(a) ST è una parte moltiplicativa di A, e U è una parte moltiplicativa di $S^{-1}A$;

(b) gli anelli di frazioni $(ST)^{-1}A$ e $U^{-1}\big(S^{-1}A\big)$ sono isomorfi.

[3] Sia $f : A \longrightarrow B$ un morfismo di anelli, e sia $U := f(S)$.
Dimostrare che $S^{-1}B$ e $U^{-1}B$ sono isomorfi come $S^{-1}A$–moduli.

[4] Supponiamo che A sia un anello a ideali principali.
Dimostrare che $S^{-1}A$ è un anello a ideali principali.

[5] Sia D un dominio a fattorizzazione unica. Dimostrare che:

(a) $S^{-1}D$ è un dominio a fattorizzazione unica;

(b) gli elementi irriducibili (=primi) di $S^{-1}D$ sono tutti e soli gli (elementi associati agli) elementi irriducibili $p \in D$ tali $(p) \cap S = \emptyset$.

[6] Sia M un A–modulo. Sia $S := \big\{x^n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$, parte moltiplicativa di $A[x]$ e di $A[[x]]$.
Dimostrare che esistono isomorfismi naturali

$$S^{-1}M[x] \;\cong\; M\big[x, x^{-1}\big] \quad , \qquad S^{-1}M[[x]] \;\cong\; M((x))$$

rispettivamente come $A[x, x^{-1}]$–moduli e come $A((x))$–moduli.

Generalizzare poi al caso di n indeterminate $x_1 , \dots , x_n$ al posto di x .

[7] Sia D un dominio a fattorizzazione unica, e Q_D il suo campo dei quozienti. Preso un elemento irriducibile (=primo) $p \in D$, siano $S_p := \big\{p^n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $S_{\mathfrak{p}} := D \setminus \mathfrak{p} = D \setminus (p)$ — dove $\mathfrak{p} := (p) = p\,D$ è l'ideale di D generato da p (che è automaticamente ideale *primo*) — le due parti moltiplicative di D naturalmente associate a p .

Dimostrare che:

(a) $\quad D_p \,:=\, S_p^{-1}D \,=\, \Big\{\, q \in Q_d \;\Big|\; \exists\, d \in D,\, n \in \mathbb{N} : q = d\big/p^n \Big\}$;

(b) $\quad D_{\mathfrak{p}} \,:=\, S_{\mathfrak{p}}^{-1}D \,=\, \Big\{\, q \in Q_d \;\Big|\; \exists\, d \in D,\, n \in \mathbb{N} : q = d\big/s \,,\; p \nmid d \Big\}$;

(c) $\qquad S_p^{-1}D \bigcap S_{\mathfrak{p}}^{-1}D \;=\; D$.

[8] – – *Caratterizzazione degli anelli di frazioni tramite Proprietà Universale:*

Si considerino le coppie (B, g) in cui B è un anello (c.u.) e $g : A \longrightarrow B$ è un morfismo di anelli tale che $g(s) \in U(B)$ per ogni $s \in S$. Diremo che una tale coppia $\big(\overline{B}, \overline{g}\,\big)$ *gode della proprietà universale (:=P.U.) — per S —* se per ogni altra coppia (B, g) esiste uno e un solo morfismo di anelli $g' : \overline{B} \longrightarrow B$ tale che $g' \circ \overline{g} = g$. Dimostrare che:

(a) Se $\big(\overline{B}_1, \overline{g}_1\big)$ e $\big(\overline{B}_2, \overline{g}_2\big)$ sono due coppie che godono della P.U., allora esiste uno e un solo isomorfismo $\gamma : \overline{B}_1 \longrightarrow \overline{B}_2$ tale che $\gamma \circ \overline{g}_1 = \overline{g}_2$.

(b) Detto $f : A \longrightarrow S^{-1}A$ il morfismo di anelli dato da $;a \mapsto f(a) := a\big/1$, la coppia $\big(S^{-1}A, f\big)$ gode della P.U.

(c) Dedurne che l'anello $S^{-1}A$ è univocamente determinato, a meno di isomorfismi.

[9] – – *Caratterizzazione dei moduli di frazioni tramite Proprietà Universale:*

Sia M un A–modulo. Per ogni $S^{-1}A$–modulo N, si indichi con $N\big|_A$ l'A–modulo ottenuto da N per restrizione di scalari da $S^{-1}A$ ad A (tramite $f : A \longrightarrow S^{-1}A$).

Si considerino le coppie (N, g) in cui N è un $S^{-1}A$–modulo e $g : M \longrightarrow N\big|_A$ è un morfismo di A–moduli. Diremo che una tale coppia $\big(\overline{N}, \overline{g}\,\big)$ *gode della proprietà universale (:=P.U.) — per S —* se per ogni altra coppia (N, g) esiste uno e un solo morfismo di $S^{-1}A$–moduli $g' : \overline{N} \longrightarrow N$ tale che $g' \circ \overline{g} = g$. Dimostrare che:

(a) Se $\big(\overline{N}_1, \overline{g}_1\big)$ e $\big(\overline{N}_2, \overline{g}_2\big)$ sono due coppie che godono della P.U., allora esiste uno e un solo isomorfismo $\gamma : \overline{N}_1 \longrightarrow \overline{N}_2$ tale che $\gamma \circ \overline{g}_1 = \overline{g}_2$.

(b) Detto $f_{_M} : M \longrightarrow S^{-1}M$ il morfismo di anelli dato da $m \mapsto f_{_M}(m) := m\big/1$, la coppia $\big(S^{-1}M, f_{_M}\big)$ gode della P.U.

(c) Dedurne che l'$S^{-1}A$–modulo $S^{-1}M$ è univocamente determinato, a meno di isomorfismi.

NOTA: la *(b)* e la *(c)* ci dicono che esiste una ben definita applicazione *biunivoca* $\Phi : Hom_A\big(M, N\big|_A\big) \longrightarrow Hom_{S^{-1}A}\big(S^{-1}M, N\big)$, data da $g \mapsto \Phi(g) := g'$ (e che, peraltro, è pure A–lineare). Nel linguaggio delle categorie — e dei funtori — questo si esprime dicendo che *"il funtore $S^{-1}(-)$ [cioè "fare le frazioni rispetto ad S"], dalla categoria $\mathcal{M}od_A$ degli A–moduli alla categoria $\mathcal{M}od_{S^{-1}A}$ degli $S^{-1}A$–moduli, è aggiunto del funtore restrizione [rispetto al morfismo $f : A \longrightarrow S^{-1}A$], dalla categoria $\mathcal{M}od_{S^{-1}A}$ alla categoria $\mathcal{M}od_A$ ".*

[10] – – Sia D un dominio di integrità, Q_D il suo campo dei quozienti, e M un D–modulo. Dimostrare che il morfismo di D–moduli $\phi : M \longrightarrow M_{Q_D} := Q_D \otimes_{_D} M$ dato da $m \mapsto \phi(m) := 1 \otimes m$ ha per nucleo $Ker(\phi) = T(M)$.

Suggerimento: l'inclusione $\supseteq$ è immediata. Per l'inverso invece, si osservi che $Q_D \otimes_{_D} M = S^{-1}D \otimes_{_D} M \cong S^{-1}M$ via $(d/s) \otimes m \mapsto (d.m)\big/s$, dove $S^{-1} := D \setminus \{0\}$. Attraverso tale isomorfismo, un elemento $m \in Ker(\phi)$, cioè tale che $1 \otimes m = 0$ in $Q_D \otimes_{_D} M$, corrisponde ad avere $m/1 = 0$ in $S^{-1}M$; infine da questo si deduca che $m \in T(M)$.

[11] Sia A un dominio *locale*, con ideale massimale $\mathfrak{m}$, e siano $\mathbb{K} := Q_A$ il campo dei quozienti e $\Bbbk := A\big/\mathfrak{m}$ il campo residuo di A . Sia M un A–modulo finitamente generato, e si considerino gli spazi vettoriali $\mathbb{K} \otimes_A M$ (su $\mathbb{K}$) e $\Bbbk \otimes_A M$ (su $\Bbbk$) ottenuti per estensione di scalari, via $A \hookrightarrow Q_A =: \mathbb{K}$ (immersione) e $A \twoheadrightarrow A\big/\mathfrak{m} =: \Bbbk$ (proiezione).

Dimostrare che M è libero se e soltanto se $dim_{\mathbb{K}}\big(\mathbb{K} \otimes_A M\big) = dim_{\Bbbk}\big(\Bbbk \otimes_A M\big)$.

Suggerimento: sfruttare il Lemma di Nakayama.