CdLM in **Matematica Pura ed Applicata** - a.a. 2022/2023

Programma svolto nel corso di

ALGEBRA COMMUTATIVA

- 8 CFU -

prof. **Fabio Gavarini**

1 - ANELLI, IDEALI, MORFISMI

Anelli, morfismi tra anelli - ideali, quozienti - Teorema Fondamentale di Omomorfismo, Teoremi di Isomorfismo – anelli ridotti, domini, campi - ideali primi, ideali massimali - anelli locali, anelli semilocali - radicale nilpotente, radicale di Jacobson – operazioni su ideali – prodotto diretto di anelli – Teorema Cinese del Resto - estensione e contrazione di ideali tramite un morfismo

2 – MODULI e ALGEBRE

Moduli su anelli, rappresentazioni di anelli - morfismi tra moduli - sottomoduli, quozienti – Teorema Fondamentale di Omomorfismo – operazioni sui sottomoduli - Teoremi di Isomorfismo – torsione di un modulo su un dominio – prodotto diretto e somma diretta – moduli finitamente generati; moduli ciclici e loro caratterizzazione

Moduli liberi, basi – moduli liberi su un insieme – esistenza di basi per spazi vettoriali – equicardinalità di basi di uno spazio vettoriale: dimensione – equicardinalità di basi di un modulo libero: rango - Lemma di Nakayama - successioni esatte (di morfismi)

Prodotto (multi)tensoriale di moduli - restrizione ed estensione di scalari

Algebre, morfismi tra algebre – prodotto tensoriale di algebre commutative

Anelli di frazioni - proprietà universale degli anelli di frazioni - moduli di frazioni - moduli di frazioni ed estensione di scalari - ideali primi in un anello di frazioni

3 - MODULI e ANELLI NOETHERIANI o ARTINIANI

Condizioni sulle catene in un insieme ordinato – moduli/anelli noetheriani o artiniani - serie di composizione - tutte le serie di composizione di un modulo hanno la stessa lunghezza – "lunghezza finita = noetherianità & artinianità" - il caso degli spazi vettoriali – "noetherianità = finitezza dei sottomoduli"

Anelli noetheriani e artiniani – criterio per "noetheriano ⇔ artiniano"

Teorema della Base di Hilbert - Teorema di Zariski - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma debole) – varietà affini - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma forte)

Decomposizione primaria di ideali negli anelli noetheriani

Dimensione di Krull di un anello – caratterizzazione degli anelli artiniani – fattorizzazione unica degli anelli artiniani in prodotto diretto di anelli artiniani locali

4 - MODULI sui DOMINI a IDEALI PRINCIPALI (DIP)

Ogni sottomodulo di un modulo libero (su un DIP) è libero – "finitamente generato (=f.g.) & senza torsione ⇒ libero" - ogni modulo finitamente generato si spezza in somma diretta di una parte libera e del sottomodulo di torsione (f.g., quindi "t.+f.g.")

Decomposizione ciclica di un modulo finitamente generato tramite parte libera e divisori elementari - decomposizione ciclica di un modulo finitamente generato tramite parte libera e invarianti - relazione tra le due decomposizioni cicliche di un modulo di torsione finitamente generato

Applicazione all'anello degli interi $\mathbf{Z}$: gruppi abeliani finitamente generati

Aplicazione al caso dei moduli $\boldsymbol{V}$ sull'anello $\boldsymbol{k}[\mathbf{x}]$ ($\boldsymbol{k}$ campo): forme canoniche di matrici – decomposizione (additiva) di Jordan-Chevalley di un endomorfismo di $\boldsymbol{V}$: esistenza, espressione polinomiale, unicità; il caso di una somma - decomposizione (moltiplicativa) di Jordan-Chevalley di un automorfismo di $\boldsymbol{V}$: esistenza e unicità; il caso di un prodotto

5 – SPETTRO PRIMO di un ANELLO

Spettro primo $Spec(A)$ di un anello A; topologia di Zariski, aperti principali - spettro massimale $Spec_{max}(A)$ – funtorialità di $Spec$ - chiusura di un sottospazio, punti chiusi – caratterizzazione degli spettri di anelli artiniani – corrispondenza di Galois tra sottoinsiemi di A e sottoinsiemi di $Spec(A)$; specializzazioni notevoli di tali corrispondenze

Proprietà di compattezza di $Spec(A)$ e dei suoi sottoinsiemi – proprietà di separabilità $Spec(A)$ e delle sue varietà

Spazi (ir)riducibili, componenti irriducibili; dimensione topologica – proprietà di (ir)riducibilità di spettri e varietà – punto generico di una varietà irriducibile – componenti irriducibili di una varietà e primi minimali - $K\text{-}dim(A)=dim(Spec(A))$

Proprietà di (s)connessione di $Spec(A)$: caratterizzazione degli spettri sconnessi