CdLM in **Matematica Pura ed Applicata** - a.a. 2021/2022

programma ***definitivo*** del corso di

ALGEBRA COMMUTATIVA

- 8 CFU -

prof. **Fabio Gavarini**

1 - ANELLI, IDEALI, MORFISMI

Anelli, morfismi tra anelli – immersione di un anello in un anello nuitario - ideali, quozienti - Teorema Fondamentale di Omomorfismo, Teoremi di Isomorfismo - ideali primi, ideali massimali; esistenza di ideali massimali - anelli locali, anelli semilocali - radicale nilpotente, radicale di Jacobson – operazioni tra ideali; proprietà notevoli degli ideali primi – prodotto diretto di anelli; criterio di fattorizzabilità in prodotto diretto; Teorema Cinese del Resto - estensione e contrazione di ideali.

Anelli di frazioni - proprietà universale degli anelli di frazioni – frazioni vs. operazioni sugli ideali - localizzazione - ideali primi in un anello di frazioni.

2 - MODULI, PRODOTTO TENSORIALE, ALGEBRE

Moduli su anelli, rappresentazioni di anelli; morfismi tra moduli - sottomoduli, quozienti – Teorema Fondamentale di Omomorfismo – operazioni tra sottomoduli - Teoremi di Isomorfismo - prodotto e somma diretti di moduli – (sotto)moduli finitamente generati; (sotto)moduli ciclici - successioni esatte (di morfismi); successioni esatte corte.

Moduli liberi, basi; moduli liberi su un insieme – esistenza di basi per spazi vettoriali (su un corpo) – equicardinalità di basi di uno spazio vettoriale: dimensione di uno spazio vettoriale (su un corpo) - equicardinalità di basi di un modulo libero: rango di un modulo libero – Lemma di Nakayama.

Torsione in un modulo su un dominio; sottomodulo di torsione – moduli senza torsione vs. moduli fedeli vs. moduli liberi.

Dualità per moduli – funtorialità del duale; il biduale; dualità per moduli liberi.

Prodotto (multi)tensoriale di moduli; proprietà di base, bifuntorialità, esattezza.

Moduli di frazioni - frazioni vs. operazioni sui sottomoduli; frazioni e prodotto tensoriale - restrizione ed estensione di scalari – reciprocità di Frobenius.

Algebre, morfismi tra algebre – prodotto tensoriale di algebre commutative.

3 - MODULI E ANELLI NOETHERIANI E ARTINIANI

Condizioni sulle catene in un insieme ordinato – moduli/anelli noetheriani o artiniani - serie di composizione - tutte le serie di composizione di un modulo hanno la stessa lunghezza – "lunghezza finita = noetherianità & artinianità" - il caso degli spazi vettoriali – "noetherianità = finitezza dei sottomoduli".

Anelli noetheriani e artiniani – criterio per "noetheriano ⇔ artiniano".

Teorema della Base di Hilbert - criterio di finitezza per algebre intermedie - Teorema di Zariski - Teorema degli Zeri di Hilbert (forma debole).

Ideali irriducibili; ideali primari – decomposizione primaria (minimale) di un ideale – esistenza della d.p.m. negli anelli noetheriani.

Dimensione di Krull di un anello – caratterizzazione degli anelli artiniani (tra gli anelli noetheriani) – fattorizzazione degli anelli artiniani in prodotto di anelli locali

4 - MODULI SUI DOMINI A IDEALI PRINCIPALI (DIP)

Ogni sottomodulo di un modulo libero (su un DIP) è libero, con rango minore o uguale – "finitamente generato (=f.g.) & senza torsione ⇒ libero" - ogni modulo finitamente generato si spezza in somma diretta di una parte libera e del sottomodulo di torsione (f.g., quindi "t.+f.g.") – esponenti e ordini per un modulo e i suoi elementi.

Elementi indipendenti in un modulo - p-(sotto)moduli, per ogni elemento primo p – decomposizione in somma diretta di parte libera e p-sottomoduli per un modulo finitamente generato - altezza e p-larghezza (p primo) di un modulo di torsione finitamente generato.

Decomposizione ciclica di un modulo finitamente generato tramite parte libera e divisori elementari - decomposizione ciclica di un modulo finitamente generato tramite parte libera e invarianti - relazione tra le due decomposizioni cicliche.

Applicazione all'anello degli interi $\mathbb{Z}$: gruppi abeliani finitamente generati o finiti.

Aplicazione al caso dei moduli $\boldsymbol{V}$ sull'anello $\boldsymbol{k}[\mathbf{x}]$ ($\boldsymbol{k}$ campo): forme canoniche di matrici (matrice compagna, forma canonica di Jordan) - decomposizione (additiva) di Jordan-Chevalley di un endomorfismo di $\boldsymbol{V}$: esistenza, espressione polinomiale, unicità – decomposizione (moltiplicativa) di Jordan-Chevalley di un automorfismo di $\boldsymbol{V}$: esistenza e unicità.

5 - LO SPETTRO PRIMO DI UN ANELLO

Richiami topologici: spazi (ir)riducibili, componenti irriducibili, dimensione combinatoria di uno spazio topologico generale.

Lo spettro primo $Spec(A)$ di un anello A; varietà (affini) in $Spec(A)$, topologia di Zariski; aperti fondamentali - spettro massimale $Spec_{max}(A)$ – funtorialità di $Spec(-)$.

Compattezza di $Spec(A)$ e delle sue varietà – compattezza degli aperti fondamentali – condizioni di compattezza per un aperto.

Chiusura di un sottospazio in $Spec(A)$; punti chiusi - il punto generico di una varietà irriducibile – lo spettro di un anelli artiniano.

Proprietà di separabilità: ogni spettro $Spec(A)$ è T_0-separabile - uno spettro $Spec(A)$ è T_1-separabile $\Leftrightarrow$ $K\text{-}dim(A) = 0$ – caratterizzazione dei primi minimali di una varietà - $Spec(A)$ è T_2-separabile $\Leftrightarrow$ $Spec(A)$ è T_1-separabile.

Criterio di (ir)riducibilità di uno spettro e di una varietà – corrispondenze di Galois (generalizzate) - componenti irriducibili e primi minimali per una varietà – $K\text{-}dim(A) = dim(Spec(A))$ – decomposizioni primarie di un ideale e primi minimali della sua varietà.

Lo spettro del prodotto diretto di un numero finito di anelli. Criterio di (s)connessione: $Spec(A)$ è sconnesso $\Leftrightarrow$ A è prodotto diretto di due anelli non banali.

BIBLIOGRAFIA

[AM] - M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, "Introduzione a l'algebra commutativa", Feltrinelli, Milano, 1981

oppure l'originale in inglese

M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, "Introduction to Commutative Algebra", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

[Fi] - C. A. Finocchiaro, "Lo spettro primo di un anello", dispense in rete.

[La] - S. Lang, "Algebra", revised Third Edition, Graduate Texts in Mathematics **211**, Springer-Verlag New York, Inc, 2002.

[MB] - S. Mac Lane, G. Birkhoff, "Algebra", Third Edition, AMS-Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (USA), 1999.

[Mi] - J. S. Milne, "A Primer of Commutative Algebra", freely available at http://www.jmilne.org/math/xnotes/ca.html (2009).

[Re] - M. Reid, "Undergraduate Commutative Algebra", London Mathematical Society Student Texts **29**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.